70%

ver documentos das aulas para simplificar da solução.

(raciocínio está correto)

Problemas Propostos Física Experimenta de Partículas e Astro partículas.

Sandra Silva

15 November 2021

1 Espaço de fase para o decaimento de três partículas

Definimos anteriormente o espaço de fase para uma partícula. Podemos, contudo, fazer uma generalização para o espaço de fase para n partículas:

$$R_n = \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \delta\left(\sum_{i=1}^{n} E_i - E\right) \tag{1}$$

Como R é um invariante de Lorentz, R_{n-1} deve ser o mesmo num sistema com momento total nulo onde a energia total é:

$$\varepsilon = \sqrt{(E - E_n)^2 - (-p_n)^2} \tag{2}$$

Tal que

$$R_{n-1}\left[(-\vec{p}_n), (E - E_n)\right] = R_{n-1}(0, \varepsilon) \tag{3}$$

Com

$$\varepsilon = \sqrt{(E - E_n)^2 - (p_n)^2} \tag{4}$$

O que dá a relação de recursão entre n e $n-1$ espaços de fase invariantes de Lorentz:

$$R_n = \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} R_{n-1}(0, \varepsilon) \tag{5}$$

Consideremos três partículas com massas m_1, m_2, m_3 e momento no centro de massa p_1, p_2, p_3. A expressão anterior fica:

$$R_3(0, E) = \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} R_2(0, \varepsilon) \tag{6}$$

Com

$$\varepsilon^2 = (E - E_3)^2 - p_3^2 \tag{7}$$

Vimos também que no caso do decaimento para duas partículas o espaço de fase era:

$$R_2 = \frac{\pi p'}{E'} = \frac{\pi}{E} \frac{\left\{\left[E^2 - (m_2 - m_1)^2\right]\left[E^2 - (m_2 + m_1)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2E} \tag{8}$$

Onde p' é o momento de cada partícula no sistema de dois corpos com energia E no centro de massa.

$$E' = {E_1}' + {E_2}' = \sqrt{m_1^2 + {p'}^2} + \sqrt{m_2^2 + {p'}^2} \tag{9}$$

Sendo $\varepsilon = E'$ e resolvendo para p', temos:

$$p' = \frac{\left\{\left[\varepsilon^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[\varepsilon^2 - (m_1 - m_2)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon} \tag{10}$$

Substituindo esta expressão por p' na equação (8) ficamos com:

basta complexo o cálculo neste momento.

$$R_3(0, E) = \int \frac{4\pi p_3^2 dp_3}{2E_3} \pi \frac{\left\{\left[E^2 - 2EE_3 + m_3^2 - (m_1 - m_2)^2\right]\left[E^2 - 2EE_3 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2(E^2 - 2EE_3 + m_3^2)} \tag{11}$$

Este integral deve ser calculado entre $p_3(min) = 0$ que corresponde à situação onde as partículas 1 e 2 são emitidas antiparalelas com igual momento. O momento máximo da terceira partícula será obtido quando as outras duas são emitidas paralelas, e com a mesma velocidade, mas sentido oposto a $\vec{p_3}$. Neste caso, $E = \sqrt{m_3^2 + p_3^2(max)} + \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + p_3^2(max)}$

Que resolvido para $p_3(max)$ é:

$$p_3(max) = \frac{\left\{\left[E^2 - (m_1 + m_2 - m_3)^2\right]\left[E^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{2E} \tag{12}$$

Este integra do espaço de fase invariante permite-nos também determinar a distribuição angular no centro de massa entre duas partículas quaisquer num sistema de n partículas.

O ângulo θ entre duas partículas que podemos definir como n e $n-1$ pode ser determinado a partir de:

$$\cos\theta = \frac{\vec{p_n} \cdot \vec{p}_{n-1}}{p_n p_{n-1}} \tag{13}$$

Repetindo o mesmo processo de recursão usado anteriormente, temos que:

$$R_n(0, E, \cos\theta) = \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} \frac{d^3 p_{n-1}}{2E_{n-1}} R_{n-2}(0, \varepsilon_{n-2}) \tag{14}$$

Onde

$$\varepsilon_{n-2}^2 = (E - E_n - E_{n-1})^2 - (\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1})^2 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-2}^2 &= (E - E_n - E_{n-1})^2 - (\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1})^2 \\ &= E^2 + m_n^2 + m_{n-1}^2 - 2(EE_n + EE_{n-1} + E_n E_{n-1} - E_n E_{n-1} + p_n p_{n-1} \cos\theta) \end{aligned}$$

Em coordenadas polares com ϕ_n e θ_n a indicar as projeções de $\vec{p}_n$ no eixo z e o ângulo azimutal respetivamente e com ϕ e θ a direção de $\vec{p}_{n-1}$ com respeito ao vetor $\vec{p}_n$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} dp_n^3 &= p_n^2 dp_n \sin\theta_n d\theta_n d\phi_n \\ dp_{n-1}^3 &= p_{n-1}^2 dp_{n-1} \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

A integração ao longo de $d\Omega_n = \sin\theta_n d\theta_n d\phi_n$ dá um fator 2ϕ tal que a equação (14) pode ser escrita como:

$$\frac{dR_n(0,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = 2\pi^2 \int \frac{P_n^2 P_{n-1}^2}{E_n E_{n-1}} dp_n dp_{n-1} R_{n-2}(0,\varepsilon_{n-2}) \tag{16}$$

Assim, a distribuição angular entre as partículas dois e três de um espaço de fase de três partículas é:

$$\frac{dR_3(0,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} =\propto \int \frac{p_2^2 p_3^2}{E_2 E_3} dp_2 dp_3 R_1(0,\varepsilon) \tag{17}$$

Recordando que:

$$R_1 = \int dp_1^3 dE_1 \delta^3(\vec{p_1}) \delta(E_1 - \varepsilon) \delta(E_1^2 - (\vec{p_1}^{\,2} + \vec{m_1}^{\,2})) \tag{18}$$

Que após a integração em p_1 e E_1, dá-nos:

$$R_1(0,\varepsilon) = \delta(\varepsilon^2 - m_1^2) \tag{19}$$

E por fim:

$$\frac{dR_3(0,E,\cos\theta)}{d(\cos\theta)} =\propto \int \frac{p_2^2 p_3^2}{E_2 E_3} dp_2 dp_3 \delta(\varepsilon^2 - m_1^2) \tag{20}$$

7