

# Propagación de Ondas Gravitacionales en la Teoría Generalizada de Proca $SU(2)$



---

Angie Milena Sánchez Méndez  
Jose Fernando Rodríguez



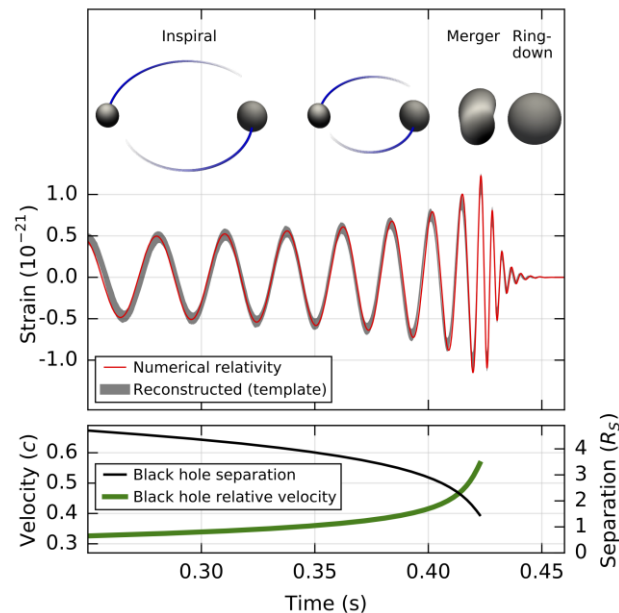
Universidad Industrial de Santander



## Algunos aspectos generales de las Ondas Gravitacionales:

- Las ondas gravitacionales (OG) son perturbaciones del campo gravitatorio que se propagan, "ondulaciones del espacio-tiempo" que se propagan.
- Las OGs contienen información del movimiento coherente de grandes masas compactas como agujeros negros, estrellas de neutrones.
- Las OGs se propagan (casi) sin ser perturbadas. No hay "contaminación"; sin embargo, son muy débiles y difíciles de detectar directamente.
- Las OG inducen un movimiento relativo entre marcos inerciales locales a través de la desviación geodésica:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -R_{0i0j}^{GW} x^j = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} x^j$$



Abbott, Benjamin P., et al. "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger." *Phys. Rev. Lett.* 116(6) (2016): 061102.



# Motivación:

La teoría de RG predice en cuanto a la propagación de las Ondas Gravitacionales que:

1. Se propagan a la velocidad de la luz ( $c$ );
2. Existen dos modos de polarización que se propagan a la misma velocidad.

Otras teorías métricas predicen, en general:

- Abbot, Benjamin P., et al. Phys. Rev. D, GW170817, (2019).
- B. P. Abbott et al, et al. Phys. Rev. D, GW150914, (2016).

1. Velocidades de propagación anómalas diferentes,  $V_g \neq C$ .
2. Hasta 6 modos de polarización.
3. Las velocidades de propagación son diferentes para cada modo (birrefringencia).



- Ezquiaga, J. M., & Zumalacárregui, M. (2020).
- Clifford Will, 2013.



# Formulación Linealizada de la Gravedad

En la aproximación de campo débil, se supone que el observador que se encuentra lo suficientemente lejos de la fuente para que el campo gravitacional sea débil:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

llamado “nearly Lorentz frame” (NLF).

Al considerar la transformación de coordenadas,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(x)$ , vemos que:

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu), \quad |\partial \zeta_{\mu\nu}| \ll 1,$$

las cuales son llamadas transformaciones de gauge de la métrica.

# Formulación Linealizada de la Gravedad

El tensor de Riemann lineal en  $h_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}),$$

es invariante ante transformaciones de gauge.

# Modos de Propagación de OG

Suponiendo una solución radiativa:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(z - V_g t)$$

las componentes del tensor de Riemann linealizado son

|                           |   |   |
|---------------------------|---|---|
| Transversal-Transversal   | { | $R_{zyzy} = \frac{1}{2} h''_{yy} \quad R_{zyyt} = -\frac{1}{2} V_g h''_{yy} \quad R_{ytyt} = \frac{1}{2} V^2 h''_{yy}$ $R_{zyzx} = \frac{1}{2} h''_{yx} \quad R_{zyxt} = -\frac{1}{2} V h''_{yx} = R_{zxyt} \quad R_{tytx} = \frac{1}{2} V^2 h''_{xy}$ $R_{zxzx} = \frac{1}{2} h''_{xx} \quad R_{zxxt} = -\frac{1}{2} V h''_{xx} \quad R_{xtxt} = \frac{1}{2} V^2 h''_{xx}$ |
| Longitudinal-Transversal  | { | $R_{ztyt} = \frac{1}{2} V^2 h''_{zy} - \frac{1}{2} V h''_{yt} \quad R_{ztxt} = \frac{1}{2} V^2 h''_{zx} - \frac{1}{2} V h''_{tx}$ $R_{zyzt} = \frac{1}{2} h''_{zy} - \frac{1}{2} V h''_{zt} \quad R_{zxzt} = \frac{1}{2} h''_{xt} - \frac{1}{2} V h''_{zx}$   |
| Longitudinal-Longitudinal | { | $R_{tztz} = \frac{1}{2} V^2 h''_{zz} - V h''_{zt} + \frac{1}{2} h''_{tt}$ $R_{zyyx}, R_{zxyx}, R_{ztyx}, R_{yxyx}, R_{yxyt}, R_{yxxt} = 0$  |

# Relatividad General Linealizada

Las ecuaciones de Einstein son:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Las ecuaciones linealizadas de Einstein en el vacío:

$$-\square h_{\mu\nu} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - h_{,\mu\nu} - h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h = 0.$$

# Modos de Propagación de OG

Las ecuaciones de Einstein linealizadas para el Ansatz  $h = (z - Vt)$ , adoptan la forma:

$$\begin{aligned}
 - (h_{yy}'' + h_{xx}'') + V^2 h_{zz}'' - 2V h_{tz}'' + h_{tt}'' &= 0 & V^2 h_{zx}'' - V h_{tx}'' &= 0 \\
 -h_{yy}'' + V^2 h_{yy}'' &= 0 & -V (h_{yy}'' + h_{xx}'') &= 0 \\
 -h_{xx}'' + V^2 h_{xx}'' &= 0 & -h_{yx}'' + V^2 h_{yx}'' &= 0 \\
 - (V^2 h_{zz}'' - 2V h_{zt}'' + h_{tt}'') - V^2 (h_{yy}'' + h_{xx}'') &= 0 & -h_{yt}'' + V h_{zy}'' &= 0 \\
 V^2 h_{zy}'' - V h_{yt}'' &= 0 & -h_{xt}'' + V h_{zx}'' &= 0
 \end{aligned}$$

Las cuales, luego de ser integradas, se reducen a:

$$\begin{aligned}
 h_{yy} + h_{xx} &= 0 \\
 (1 - V^2) (h_{yy}, h_{xx}, h_{23}) &= 0 \\
 h_{yt} &= V h_{zy}; h_{xt} = V h_{zx} \\
 h_{tt} - 2V h_{zt} + V^2 h_{zz} &= 0
 \end{aligned}$$

# Teoría Generalizada de Proca SU(2) (GSU<sub>2</sub>P)

¿Por qué modificar RG?

Aspectos fenomenológicos:

1. El problema de la materia oscura
2. El problema de la energía oscura
3. Tensión de Hubble

Aspectos Teóricos:

1. Singularidades
2. El problema de la constante cosmológica
3. Problema de renormalizabilidad y unitariedad

## ***Teoría generalizada de Proca:***

- Teoría métrica (Principio de equivalencia de Einstein).
- Grados de libertad extra vectoriales.
- Propaga el número correcto de grados de libertad.
- Las ecuaciones de campo son de segundo orden, evitando la inestabilidad de Orstrograski
- Simetría global SU(2). El grupo SU(2) es homomorfo al grupo de rotaciones SO(3).
- Triada cósmica emerge naturalmente.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathcal{L}_4^i + \sum_{i=1}^7 \chi_i \mathcal{L}_2^i + \sum_{k=1}^4 \delta_i \mathcal{L}_{4,p}^i \right)$$

# Teoría Generalizada de Proca SU(2)

A. G. Cadavid, Y. Rodríguez, and L. G. Gómez, Phys. Rev. D, 2020.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathcal{L}_4^i + \sum_{i=1}^7 \chi_i \mathcal{L}_2^i + \sum_{k=1}^4 \delta_k \mathcal{L}_{4,p}^k \right)$$

De manera más explícita se tiene:

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{1}{16\pi} R,$$

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a},$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{8\pi} B_{\mu a} B^{\mu a},$$

donde:

$B_\mu^a$ ,  $\longrightarrow$  Campos vectoriales asociados al álgebra de Lie del grupo SU(2);

$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + \tilde{g} \varepsilon_{abc} B_\mu^b B_\nu^c$ ,  $\longrightarrow$  Tensor de Faraday no abeliano;

$A_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a - \nabla_\nu B_\mu^a$ ,  $\longrightarrow$  Versión abeliana de  $F_{\mu\nu}^a$ ;

$S_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a + \nabla_\nu B_\mu^a$ ,  $\longrightarrow$  Versión simétrica de  $A_{\mu\nu}^a$ ;

# Teoría Generalizada de Proca SU(2)

A. G. Cadavid, Y. Rodríguez, and L. G. Gómez, Phys. Rev. D, 2020.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathcal{L}_4^i + \sum_{i=1}^7 \chi_i \mathcal{L}_2^i + \sum_{k=1}^4 \delta_k \mathcal{L}_{4,p}^k \right)$$

En total, se tienen 21 piezas lagrangianas que conforman la acción en esta teoría; sin embargo, para este trabajo, consideraremos 4 de ellas, con diferentes propiedades:

$$\mathcal{L}_4^1 = -B_\rho^b B_b^\rho S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu - 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + B_\rho^b B_b^\rho S_\mu^{\mu a} S_{\nu a}^\nu + 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b},$$

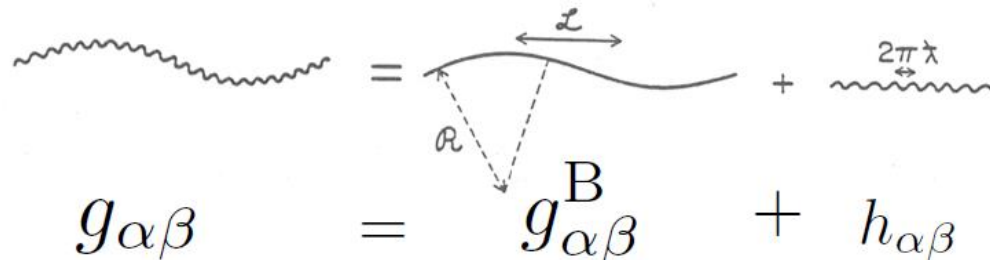
$$\mathcal{L}_{4,p}^3 = B_\alpha^a B_\beta^b B_{\tau b} B_a^\tau \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\sigma\mu\rho}^\alpha,$$

$$\mathcal{L}_4^4 = B_\rho^b B_b^\rho B_{\sigma a} B^{\sigma a} R + 2B_{\rho b} B_a^\rho B_\sigma^b B^{\sigma a} R,$$

$$\mathcal{L}_2^6 = B_\rho^b B_b^\rho A_{\mu\nu a} A^{\mu\nu a},$$

# Aproximación Eikonal

La condición de óptica geométrica es válida cuando  $\lambda \ll L_B$ :



$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^B + h_{\alpha\beta}$$

Bajo la aproximación eikonal se tiene que:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = [A_{\mu\nu}(x) + \varepsilon B_{\mu\nu}(x) + \dots] e^{i\theta(x)/\varepsilon},$$

donde  $\varepsilon$  es del orden de  $\lambda/L$ .

# Aproximación Eikonal (WKB) en RG

De la ecuación de propagación

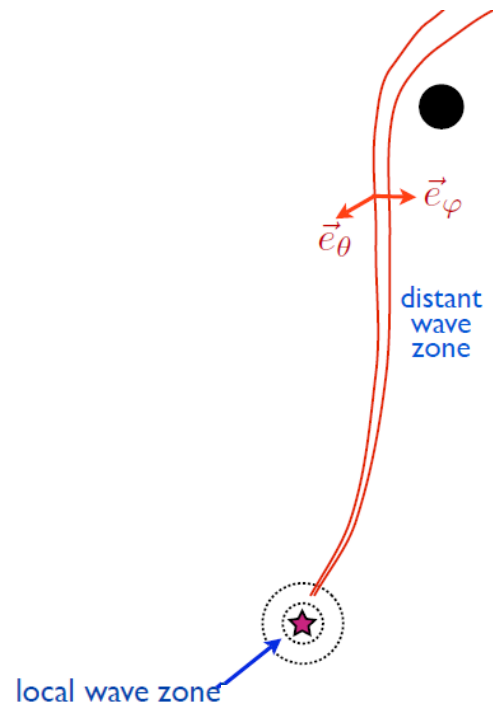
$$\bar{D}^\rho \bar{D}_\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

se obtienen las curvas perpendiculares a las superficies de fase constante

$$\begin{aligned} k_\alpha k^\alpha &= 0 \\ \bar{D}_\beta k_\alpha k^\beta &= 0, \end{aligned}$$

donde  $k_\mu \equiv \partial_\mu \theta$ . Adicionalmente, la polarización de estas curvas es perpendicular y transportada paralelamente a ellas:

$$\begin{aligned} e_{\mu\alpha} k^\alpha &= 0, \\ \bar{D}_\alpha e_{\mu\nu} k^\alpha &= 0. \end{aligned}$$



# Ecuaciones de propagación en GSU<sub>2</sub>P

Al aplicar el principio variacional a la acción GPSU(2), se obtienen las ecuaciones de campo

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \frac{\delta S_{GPSU(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad \mathcal{C}_{a\mu} = \frac{\delta S_{GPSU(2)}}{\delta B^{\mu a}} = 0.$$

Luego, las perturbaciones de la métrica y de los campos vectoriales:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}; \quad B_{a\mu} = B_{a\mu}^{(B)} + y_{a\mu},$$

para obtener las ecuaciones de campo, las cuales son perturbadas a primer orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} &\rightarrow \delta \mathcal{E}_{\mu\nu} \left( h_{\alpha\beta}^{(1)}, y_{a\mu}^{(1)}, g_{\mu\nu}^{(B)}, B_{a\alpha}^{(B)} \right), \\ \mathcal{C}_{\mu\nu} &\rightarrow \delta \mathcal{C}_{\mu\nu} \left( h_{\alpha\beta}^{(1)}, y_{a\mu}^{(1)}, g_{\mu\nu}^{(B)}, B_{a\alpha}^{(B)} \right). \end{aligned}$$

# Ecuaciones de propagación en GPSU(2)

- De las ecuaciones perturbadas a primer orden, sólo se consideran aquellos términos de la forma  $\nabla\nabla h_{\mu\nu}, \nabla\nabla y_{\alpha\mu}$ , términos de orden dominante (L.O.)  $\propto \partial\theta\partial\theta (1/\epsilon^2)$ . Este término se obtiene despreciando curvatura, las derivadas de fondo, y sustituyendo en derivadas covariantes en parciales.
- El orden dominante se obtiene al ir a un NLF (nearly Lorentz frame): realizar perturbaciones en un fondo plano, y despreciar derivadas del campo vectorial de fondo.
- Términos  $g_c \nabla h_{\mu\nu} g_c \nabla k_u^a$  contribuyen máximo con  $\partial\theta \rightarrow 1/\epsilon$ .

- Will, C. M. (2018). Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge University Press.

- Bettoni, D., Ezquiaga, J. M., Hinterbichler, K., & Zumalacárregui, M. (2017). Speed of gravitational waves and the fate of scalar-tensor gravity. Phys. Rev. D, 95(8), 084029.

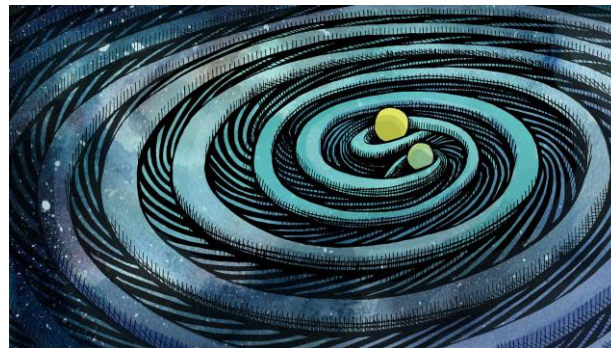


## Algunas consideraciones respecto a la aproximación WKB y el presente trabajo:

- Si no se tienen en cuenta variaciones en la amplitud, sino las velocidades de propagación de las ondas gravitacionales, fenómenos como la fricción generada por la expansión en el espacio-tiempo de FLRW no se tendrán en cuenta; es decir,

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \hat{C}k^2 \right] \begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix} = 0$$

- Dado que la velocidad de propagación de las ondas se obtiene de manera local, por el principio de equivalencia, es indistinguible tomar un fondo como el de Minkowski o cualquier otro fondo que sea solución a las ecuaciones de campo de la teoría de gravedad en cuestión asociadas a la métrica.
- El ítem anterior no ocurre con las ecuaciones de campo asociadas a los grados de libertad adicionales.



# Descomposición por helicidades para obtener modos de propagación

Se considera nuevamente la solución

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

donde, es posible afirmar que  $h_{00}$  es un escalar bajo rotaciones,  $h_{0i}$  se transforma bajo rotaciones como un vector espacial y  $h_{ij}$  como un tensor espacial.

De este modo, se puede utilizar el hecho de que un campo vectorial se puede descomponer en una parte transversal y una longitudinal, gracias al *teorema de Helmholtz*, tal que, la perturbación se puede expresar como:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\psi, & \partial_i \beta^i &= 0, \\ h_{0i} &= \beta_i + \partial_i \gamma, & \partial_i \epsilon^i &= 0, \\ h_{ij} &= -2\phi \delta_{ij} + \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \lambda + \frac{1}{2} (\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i) + h_{ij}^{\text{TT}}, & \partial^j h_{ij}^{\text{TT}} &= 0, \\ & & \delta^{ij} h_{ij}^{\text{TT}} &= 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

# Descomposición por helicidades para obtener modos de propagación

Los modos son:

1. Modo tensorial
2. Modo escalar
3. Modo vectorial

Cuya representación matricial adopta la forma:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Psi & \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ \Phi_1 & h_+ + 2\Phi & h_\times & 0 \\ \Phi_2 & h_\times & -h_+ + 2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Phi \end{pmatrix}, \quad y_{ij} = \begin{pmatrix} y_+ + y_s & y_\times & y_{v_1} \\ y_\times & -y_+ + y_s & y_{v_2} \\ y_{v_1} & y_{v_2} & y_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{y}_{v_1} & \tilde{y}_{v_2} \\ -\tilde{y}_{v_1} & 0 & \tilde{y}_{v_3} \\ -\tilde{y}_{v_2} & -\tilde{y}_{v_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

# Formalismo de Newman-Penrose

El puente entre el tensor métrico y la tétrada puede también ser establecido a través de una tétrada nula compleja. Ambas estrategias están relacionadas, esto debido a que cualquier tétrada ortonormal  $\{e^{(a)}\}$  define una tétrada nula

$$\{\Omega^{(a)}\} = \{l, n, m, \bar{m}\},$$

construida de la forma

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0),$$

bajo las condiciones

$$l \cdot l = n \cdot n = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = 0,$$

$$l \cdot n = -m \cdot \bar{m} = 1,$$

$$l \cdot m = n \cdot \bar{m} = 0;$$

tal que

$$\mathbf{g} = l \otimes n + n \otimes l - m \otimes \bar{m} - \bar{m} \otimes m.$$

# Clasificación E(2)

Se definen 6 amplitudes asociadas a 6 modos de polarización

$$\Psi_0 = \frac{1}{4}(V-1)^2 \left[ (\ddot{h}_{xx} - \ddot{h}_{yy}) - 2i\ddot{h}_{xy} \right]$$

$$\Psi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(V-1) \left[ (V\ddot{h}_{xz} + \dot{h}_{tx}) - i(V\dot{h}_{yz} + \dot{h}_{ty}) \right]$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{4} \left( V^2\ddot{h}_{zz} + 2V\ddot{h}_{tz} + \ddot{h}_{tt} \right)$$

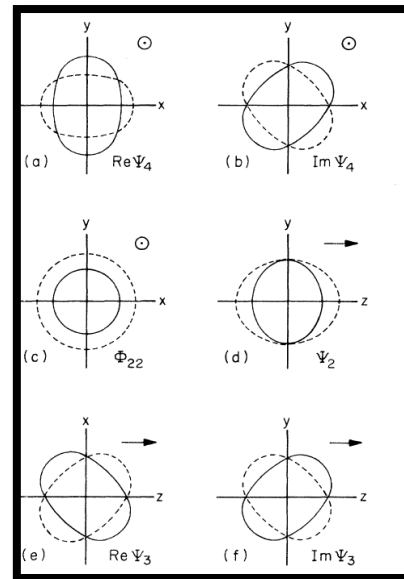
$$\Psi_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(V+1) \left[ (V\ddot{h}_{xz} + \dot{h}_{tx}) - i(V\dot{h}_{yz} + \dot{h}_{ty}) \right]$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{16}(V+1)^2 \left[ (\ddot{h}_{xx} - \ddot{h}_{yy}) - 2i\ddot{h}_{xy} \right]$$

Cada amplitud tiene sus helicidades asociadas

$$\Psi_2(u) \quad (s=0), \quad \Phi_{22}(u) \quad (s=0),$$

$$\Psi_3(u) \quad (s=\pm 1), \quad \Psi_4(u) \quad (s=\pm 2).$$



Modos de polarización predichos en teorías de gravedad.

- Eardley, Douglas M., et al. Phys. Rev. Lett. (1973)

# Clasificación E(2)

- Eardley, Douglas M., et al. Phys Rev (1973)

Se definen las clases de ondas gravitacionales en términos de la proyección del tensor de Riemann sobre las tétradas nulas:

*invariant E(2) classes of waves* (Notation is explained in Sec. III):

*Class II<sub>6</sub>.*  $\Psi_2 \neq 0$ . All standard observers measure the same nonzero amplitude in the  $\Psi_2$  mode. (But the presence or absence of all other modes is observer-dependent.)

*Class III<sub>5</sub>.*  $\Psi_2 = 0 \neq \Psi_3$ . All standard observers measure the absence of  $\Psi_2$  and the presence of  $\Psi_3$ . (But the presence or absence of  $\Psi_4$  and  $\Phi_{22}$  is observer-dependent.)

*Class N<sub>3</sub>.*  $\Psi_2 = 0 = \Psi_3$ ;  $\Psi_4 \neq 0 \neq \Phi_{22}$ . Presence or absence of all modes is independent of observer.

*Class N<sub>2</sub>.*  $\Psi_2 = 0 = \Psi_3$ ;  $\Psi_4 \neq 0 = \Phi_{22}$ . Independent of observer.

*Class O<sub>1</sub>.*  $\Psi_2 = 0 = \Psi_3$ ;  $\Psi_4 = 0 \neq \Phi_{22}$ . Independent of observer.

*Class O<sub>0</sub>.*  $\Psi_2 = 0 = \Psi_3$ ;  $\Psi_4 = 0 = \Phi_{22}$ . Independent of observer. All standard observers measure no wave.

Onda propagándose en dirección positiva  $z$  con  $V = 1$ ,  $\Psi_0 =$ ,  $\Psi_1 =$ ,  $\Psi_2 =$ ,  $\Psi_3 = 0$ ,  $\Psi_4 = \frac{1}{2} (\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times)$

# Clasificación E(2)

El tensor de Weyl está descrito por 5 escalares complejos

$$\Psi_0 = \frac{1}{4}(V-1)^2 [(\ddot{h}_{xx} - \ddot{h}_{yy}) - 2i\ddot{h}_{xy}]$$

$$\Psi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(V-1) [(V\ddot{h}_{xz} + \dot{h}_{tx}) - i(V\dot{h}_{yz} + \dot{h}_{ty})]$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{4}(V^2\ddot{h}_{zz} + 2V\dot{h}_{tz} + \dot{h}_{tt})$$

$$\Psi_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(V+1) [(V\ddot{h}_{xz} + \dot{h}_{tx}) - i(V\dot{h}_{yz} + \dot{h}_{ty})]$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{16}(V+1)^2 [(\ddot{h}_{xx} - \ddot{h}_{yy}) - 2i\ddot{h}_{xy}]$$

Onda propagándose en dirección positiva  $z$  con  $V = 1$ ,  $\Psi_0 =$ ,  $\Psi_1 =$ ,  $\Psi_2 =$ ,  $\Psi_3 = 0$ ,  $\Psi_4 = \frac{1}{2}(\ddot{h}_+ - i\dot{h}_\times)$

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

## Modo Tensorial:

Se considera un fondo homogéneo isótropo (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker)

$$g = \begin{pmatrix} -a(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\eta) \end{pmatrix}.$$

Para los modos transversal-transversal o helicidad 2, tenemos

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(\eta, z)a(\eta) & h_\times(\eta, z)a(\eta) & 0 \\ 0 & h_\times(\eta, z)a(\eta) & -h_+(\eta, z)a(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_+(\eta, z)a(\eta) & y_\times(\eta, z)a(\eta) & 0 \\ 0 & y_\times(\eta, z)a(\eta) & -y_+(\eta, z)a(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

Las velocidades de propagación, en cada uno de los lagrangianos propuestos asociado a la helicidad 2 (tensorial):

$$\mathcal{L}_4^1 = -B_\rho^b B_b^\rho S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu - 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + B_\rho^b B_b^\rho S_\mu^{\nu a} S_{\nu a}^\mu + 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\mu^{\nu a} S_\nu^{\mu b},$$

No es lumínica

De

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \hat{C}k^2 \right] \begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix} = 0$$

se tiene que la matriz de velocidades es:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{(1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2)(1+60\alpha 1\varphi(\eta)^4)}{1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2+40\alpha 1\varphi(\eta)^4} & -\frac{200\alpha 1^2\varphi(\eta)^6 a(\eta)}{1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2+40\alpha 1\varphi(\eta)^4} \\ -\frac{200\alpha 1^2\varphi(\eta)^6}{(1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2+40\alpha 1\varphi(\eta)^4)a(\eta)} & -\frac{(1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2)(1+40\alpha 1\varphi(\eta)^4)}{1+5\alpha 1\varphi(\eta)^2+40\alpha 1\varphi(\eta)^4} \end{pmatrix}$$

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

cuyos vectores y valores propios son

$$\left\{ \frac{\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2) \mathbf{a}(\eta) + \sqrt{\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^8 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 (\mathbf{2} + 85\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{20\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^6}, \mathbf{1} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2) \mathbf{a}(\eta) - \sqrt{\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^8 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 (\mathbf{2} + 85\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{20\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^6}, \mathbf{1} \right\}$$

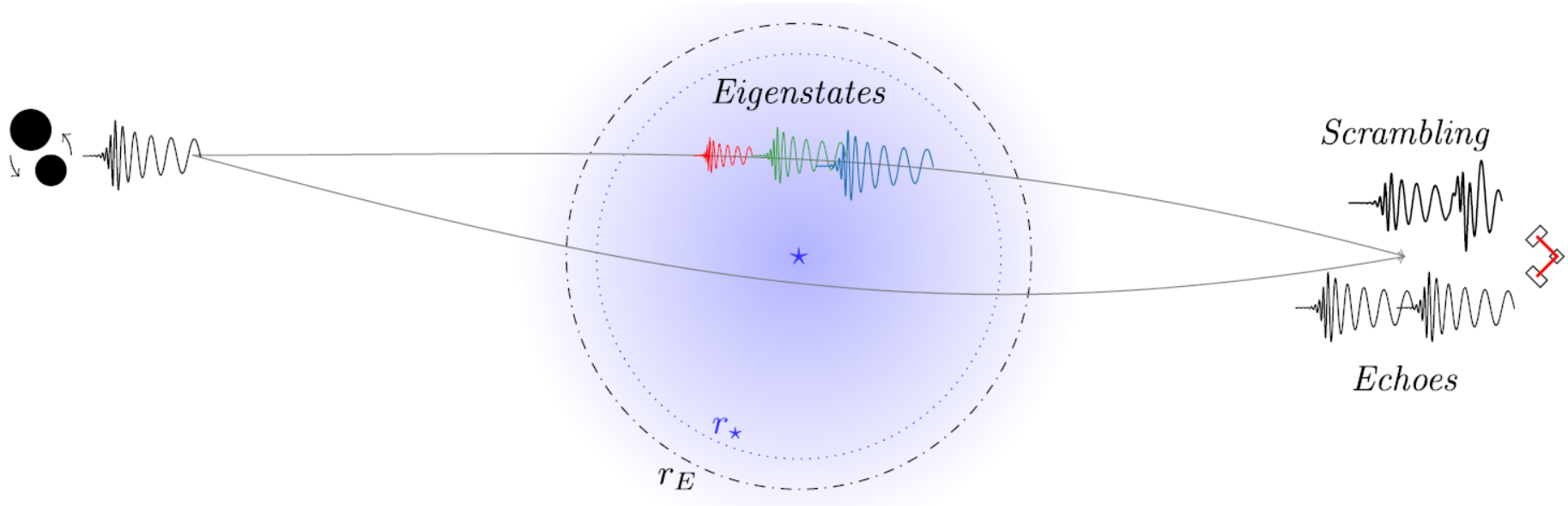
y

$$-\frac{(\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2) (\mathbf{1} + 50\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta) + 10\sqrt{\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^8 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 (\mathbf{2} + 85\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{(\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 + 40\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta)},$$

$$-\frac{((\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2) (\mathbf{1} + 50\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta)) + 10\sqrt{\alpha \mathbf{1}^2 \varphi(\eta)^8 (\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 (\mathbf{2} + 85\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{(\mathbf{1} + 5\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^2 + 40\alpha \mathbf{1} \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta)}$$

respectivamente.

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>



-Ezquiaga, J. M., & Zumalacárregui, M. (2020). Gravitational wave lensing beyond general relativity: Birefringence, echoes, and shadows. *Physical Review D*, 102(12), 124048.

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

Los valores propios representan las velocidades de las velocidades de los modos de propagación, de modo que si son diferentes, se presentará el fenómeno de birrefringencia:

$$B_{refrig} = - \frac{2\theta \sqrt{\alpha^2 \varphi(\eta)^8 (1 + 5\alpha \varphi(\eta)^2 (2 + 85\alpha \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{(1 + 5\alpha \varphi(\eta)^2 + 40\alpha \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta)}$$

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

Los valores propios representan las velocidades de las velocidades de los modos de propagación, de modo que si son diferentes, se presentará el fenómeno de birrefringencia:

$$B_{refrig} = - \frac{2\theta \sqrt{\alpha^2 \varphi(\eta)^8 (1 + 5\alpha \varphi(\eta)^2 (2 + 85\alpha \varphi(\eta)^2)) \mathbf{a}(\eta)^2}}{(1 + 5\alpha \varphi(\eta)^2 + 40\alpha \varphi(\eta)^4) \mathbf{a}(\eta)}$$

Importancia de este fenómeno:

| Fenómeno             | LIGO-VIRGO | Cont. EM | Detectores Adicionales |
|----------------------|------------|----------|------------------------|
| Vel. Luminal         | ✓          | ✓        | ×                      |
| Birrefringencia      | ✓          | ×        | ×                      |
| Polarizaciones extra | ✓          | ×        | ✓                      |

# Determinación de las velocidades en GPSU<sub>2</sub>

1. Se han determinado las velocidades de propagación, en cada uno de los lagrangianos propuestos asociado a la helicidad 2:

$$\mathcal{L}_4^1 = -B_\rho^b B_b^\rho S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu - 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b} + B_\rho^b B_b^\rho S_\mu^{\nu a} S_{\nu a}^\mu + 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\mu^{\nu a} S_\nu^{\mu b}$$

No es lumínica

$$\mathcal{L}_4^4 = B_\rho^b B_b^\rho B_{\sigma a} B^{\sigma a} R + 2B_{\rho b} B_a^\rho B_b^\sigma B^{\sigma a} R$$

Es lumínica

$$\mathcal{L}_2^6 = B_\rho^b B_b^\rho A_{\mu\nu a} A^{\mu\nu a},$$

Es lumínica

$$\mathcal{L}_{4,p}^3 = B_\alpha^a B_\beta^b B_{\tau b} B_a^\tau \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta} R_{\sigma\mu\rho}^\alpha$$

Es lumínica

# En proceso:

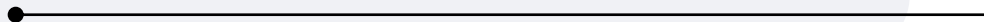
Encontrar modos de polarización extra asociados a los modos escalares y vectoriales

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Psi & \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ \Phi_1 & h_+ + 2\Phi & h_\times & 0 \\ \Phi_2 & h_\times & -h_+ + 2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Phi \end{pmatrix}, \quad y_{ij} = \begin{pmatrix} y_+ + y_s & y_\times & y_{v_1} \\ y_\times & -y_+ + y_s & y_{v_2} \\ y_{v_1} & y_{v_2} & y_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{y}_{v_1} & \tilde{y}_{v_2} \\ -\tilde{y}_{v_1} & 0 & \tilde{y}_{v_3} \\ -\tilde{y}_{v_2} & -\tilde{y}_{v_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

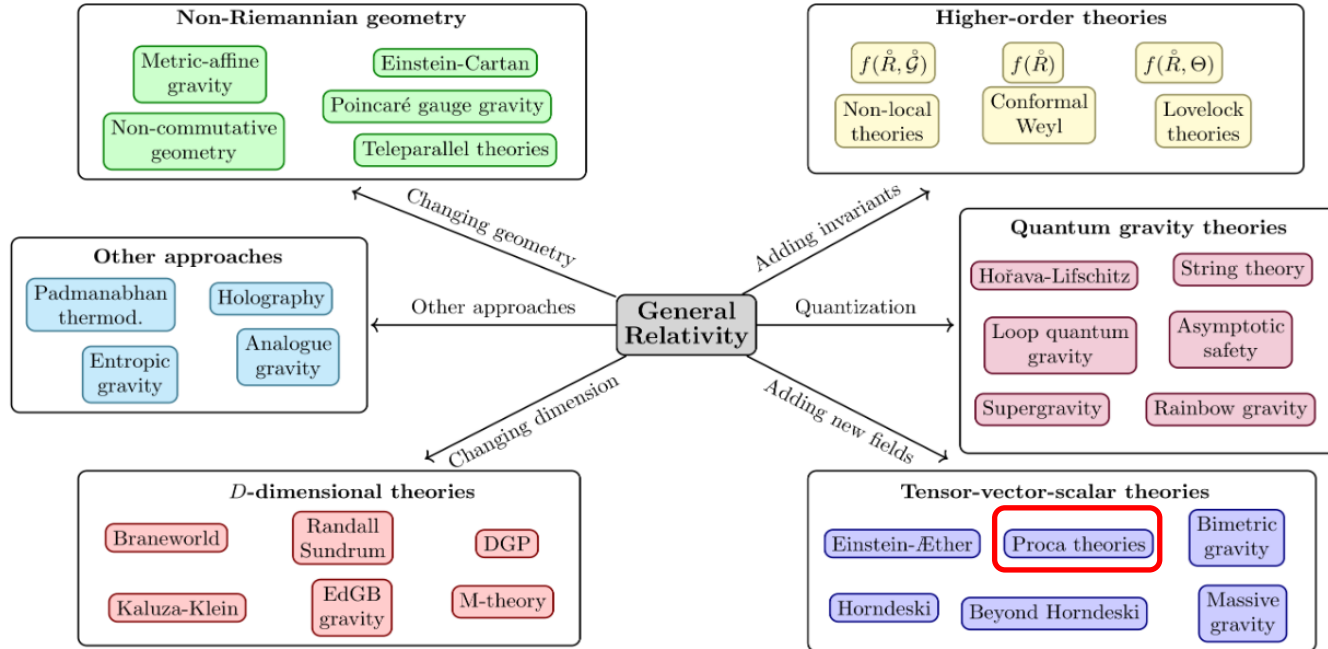
# Conclusiones

1. La teoría GPSU(2) reproduce los mismos modos tensoriales transversales de Relatividad General y dos adicionales provenientes de los campos vectoriales  $\mathbf{B}$ .
2. La teoría GPSU(2) predice al menos un conjunto de modos de propagación con velocidades anómalas, causando así el fenómeno de birrefringencia.
3. El fenómeno de birrefringencia facilita la clasificación de las teorías modificadas de la gravedad.

GRACIAS.



# Teorías Modificadas de la Gravedad



# Marco Teórico: Formulación Linealizada de la Gravedad

En la aproximación de campo débil, suponemos que existe un sistema de referencia en donde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

el cual, bajo una transformación de gauge

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(x),$$

vemos que

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu),$$

donde  $|\partial_\mu \zeta_\nu|$  sea como máximo de igual orden que  $|h_{\mu\nu}|$ .

# Solución de onda en el gauge TT

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ikx}$$

donde

$$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k}) \text{ and } \omega/c = |\mathbf{k}|$$

# Introducción: Primera observación directa de OG

first direct detection of gravitational waves (GW) and first direct observation of a black hole binary

|                                |                                   |   |   |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|---|
| observed by                    | LIGO L1, H1                       | duration from 30 Hz                       | ~ 200 ms                                    |
| source type                    | black hole (BH) binary            | # cycles from 30 Hz                       | ~10   |
| date                           | 14 Sept 2015                      | peak GW strain                            | $1 \times 10^{-21}$                         |
| time                           | 09:50:45 UTC                      | peak displacement of interferometers arms | $\pm 0.002$ fm                              |
| likely distance                | 0.75 to 1.9 Gly<br>230 to 570 Mpc | frequency/wavelength at peak GW strain    | 150 Hz, 2000 km                             |
| redshift                       | 0.054 to 0.136                    | peak speed of BHs                         | ~ 0.6 c                                     |
| signal-to-noise ratio          | 24                                | peak GW luminosity                        | $3.6 \times 10^{31}$ erg s <sup>-1</sup>    |
| false alarm prob.              | < 1 in 5 million                  | radiated GW energy                        | 2.5-3.5 M <sub>⊙</sub>                      |
| false alarm rate               | < 1 in 200,000 yr                 | remnant ringdown freq.                    | ~ 250 Hz                                    |
| Source Masses                  | M <sub>⊙</sub>                    | remnant damping time                      | ~ 4 ms                                      |
| total mass                     | 60 to 70                          | remnant size, area                        | 180 km, $3.5 \times 10^5$ km <sup>2</sup>   |
| primary BH                     | 32 to 41                          | consistent with general relativity?       | passes all tests performed                  |
| secondary BH                   | 25 to 33                          | graviton mass bound                       | < $1.2 \times 10^{-22}$ eV                  |
| remnant BH                     | 58 to 67                          | coalescence rate of binary black holes    | 2 to 400 Gpc <sup>-3</sup> yr <sup>-1</sup> |
| mass ratio                     | 0.6 to 1                          | online trigger latency                    | ~ 3 min                                     |
| primary BH spin                | < 0.7                             | # offline analysis pipelines              | 5   |
| secondary BH spin              | < 0.9                             | CPU hours consumed                        | ~ 50 million (=20,000 PCs run for 100 days) |
| remnant BH spin                | 0.57 to 0.72                      | papers on Feb 11, 2016                    | 13  |
| signal arrival time delay      | arrived in L1 7 ms before H1      | # researchers                             | ~1000, 80 institutions in 15 countries      |
| likely sky position            | Southern Hemisphere               |   |   |
| likely orientation resolved to | face-on/off<br>~600 sq. deg.      |   |   |

Detector noise introduces errors in measurement. Parameter ranges correspond to 90% credible bounds.  
 Acronyms: L1=LIGO Livingston, H1=LIGO Hanford; Gly=giga lightyear= $9.46 \times 10^{17}$  km; Mpc=mega parsec= $3.2$  million lightyear, Gpc= $10^3$  Mpc, fm=femtometer= $10^{-15}$  m, M<sub>⊙</sub>=1 solar mass= $2 \times 10^{30}$  kg

Abbott, Benjamin P., et al.  
 "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger." *Physical review letters* 116.6 (2016): 061102.

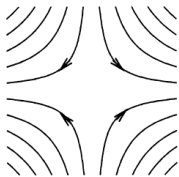
# Marco Teórico: Interacción entre masas y OG

Las OG inducen un movimiento relativo entre marcos inerciales locales a través de la desviación geodésica.

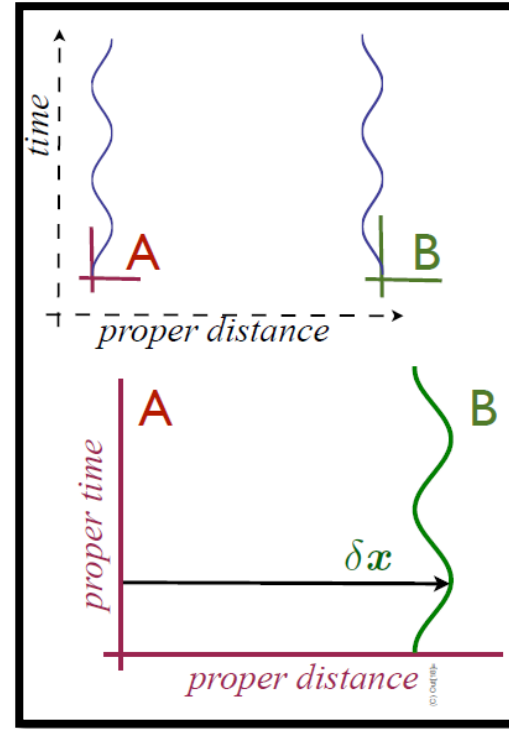
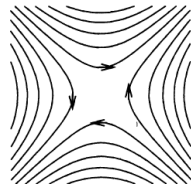
$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}$$

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} \xi^j$$

Polarización +



Polarización x



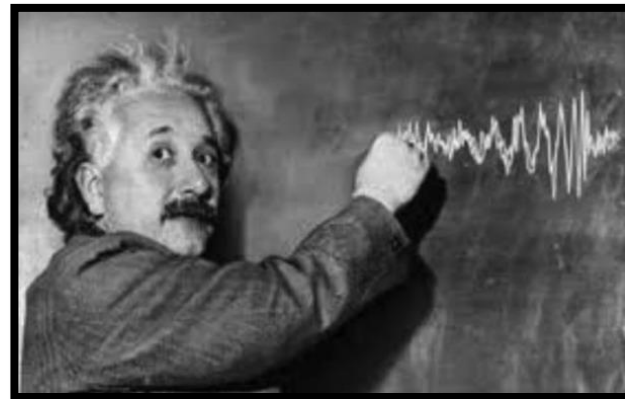


# Teoría de la Relatividad General

La teoría (RG) enuncia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

Einstein, Albert (1915).



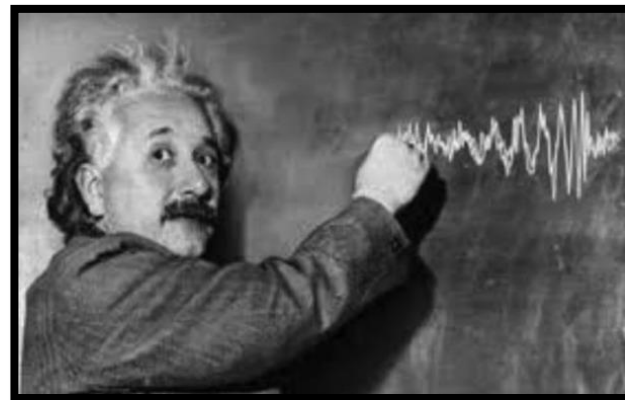


# Teoría de la Relatividad General

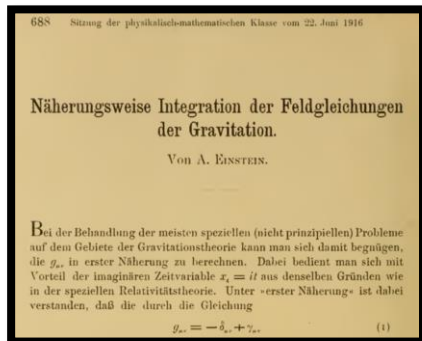
La teoría (RG) enuncia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

Einstein, Albert (1915).



se deriva:



*“De esto se deduce  
que los campos  
gravitacionales se  
propagan a la  
velocidad de la luz.”*

Einstein, Albert. "Über gravitationswellen." *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1918).



# Motivación:

La 1. Ya se comprobó experimentalmente.

- Abbot, Benjamin P., et al. Physl rev, GW170817, (2017).

Algunas teorías de Horndeski y más allá de Horndeski quedaron desfavorecidas ante esta observación.

|           | $c_g = c$  | $c_g \neq c$  |
|-----------|--|---|
| Horndeski | General Relativity<br>quintessence/k-essence [47]<br>Brans-Dicke/ $f(R)$ [48, 49]<br>Kinetic Gravity Braiding [51] | quartic/quintic Galileons [13, 14]<br>Fab Four [15]<br>de Sitter Horndeski [50]<br>$G_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ [5], $f(\phi)$ -Gauss-Bonnet [53] |
| beyond H. | Derivative Conformal (19) [17]<br>Disformal Tuning (21)<br>quadratic DHOST with $A_1 = 0$                          | quartic/quintic GLPV [18]<br>quadratic DHOST [20] with $A_1 \neq 0$<br>cubic DHOST [23]   |
|           | Viable after GW170817  | Non-viable after GW170817   |

- Ezquiaga, J. M., & Zumalacárregui, M. (2017).



# Motivación:

La 1. Ya se comprobó experimentalmente.

- Abbot, Benjamin P., et al. Physl rev, GW170817, (2017).

Algunas teorías de Horndeski y más allá de Horndeski quedaron desfavorecidas ante esta observación.

|           | $c_g = c$  | $c_g \neq c$  |
|-----------|--|---|
| Horndeski | General Relativity<br>quintessence/k-essence [47]<br>Brans-Dicke/ $f(R)$ [48, 49]<br>Kinetic Gravity Braiding [51] | quartic/quintic Galileons [13, 14]<br>Fab Four [15]<br>de Sitter Horndeski [50]<br>$G_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ [5], $f(\phi)$ -Gauss-Bonnet [53] |
| beyond H. | Derivative Conformal (19) [17]<br>Disformal Tuning (21)<br>quadratic DHOST with $A_1 = 0$                          | quartic/quintic GLPV [18]<br>quadratic DHOST [20] with $A_1 \neq 0$<br>cubic DHOST [23]   |
|           | Viable after GW170817  | Non-viable after GW170817   |

- Ezquiaga, J. M., & Zumalacárregui, M. (2017).



¡Queremos poner a prueba la teoría Generalizada de Proca SU(2)!

# Motivación:

La teoría de RG predice en cuanto a la propagación de las Ondas gravitacionales que:

1. Se propagan a la velocidad de la luz;
2. Existen dos modos que se propagan a la misma velocidad.

- Eardley, Douglas M., et al. Phys Rev (1973)
- Will, Clifford M. Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge university press (2018).

1. Ya se comprobó experimentalmente en un fondo de FLRW.

- Abbot, Benjamin P., et al. Physl rev, GW170817, (2017).

2. No es descartable hasta el momento.

3. Serviría como muestra de la necesidad de modificar la teoría de RG.

- Ezquiaga, J. M., & Zumalacárregui, M. (2020).



# Preliminar

Partimos de las ecuaciones de campo de RG:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad \Rightarrow$$

La teoría es invariante bajo difeomorfismos generales



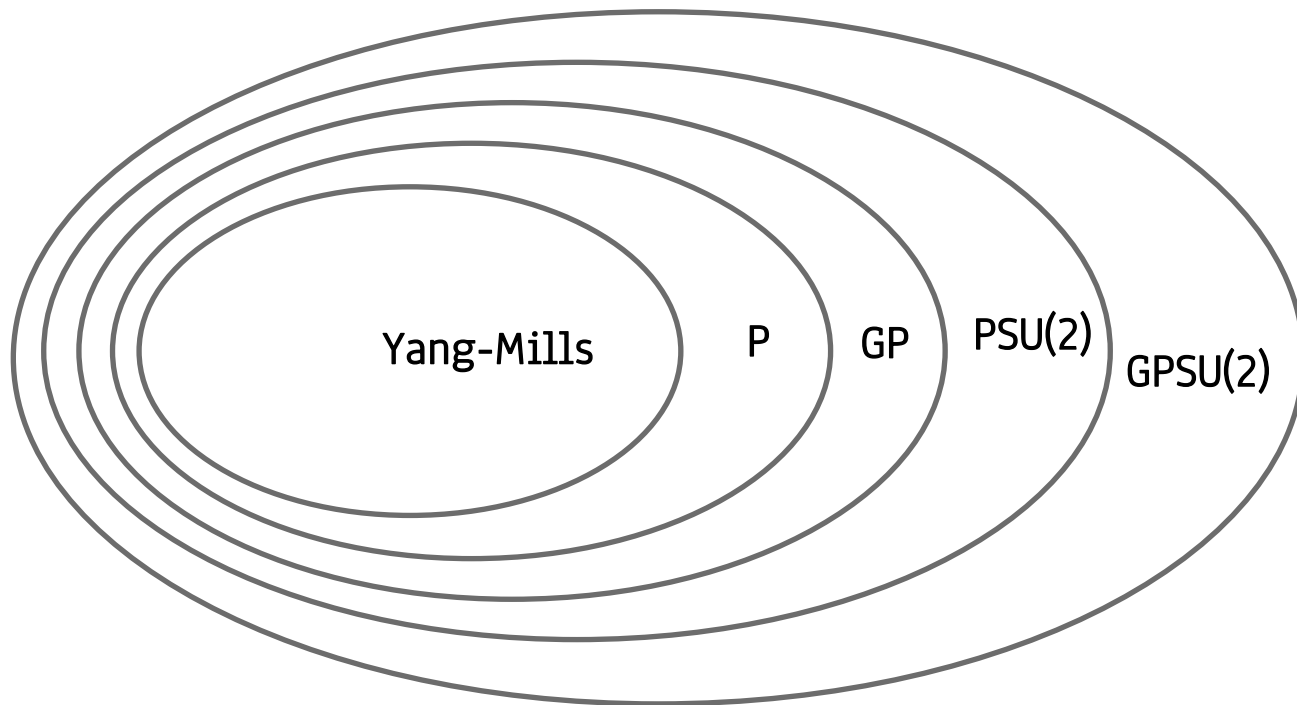
$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x).$$

De esto se demuestra que las componentes de la métrica transforman como:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x).$$

# Marco teórico: Teorías Vector-Tensor

Hornsdeski



# Formulación Linealizada de la Gravedad

- 1. Singularidades:** La teoría de Relatividad general las predice.
- 2. El problema de la constante cosmológica:** La constante cosmológica  $\Lambda$  que busca describir la materia oscura posee problemas de ajuste fino.
- A3. Problema de renormalizabilidad y unitariedad :** La teoría de RG no es renormalizable perturbativamente.

# Descomposición por helicidades para obtener modos de propagación

Bajo una transformación de fourier:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

se obtiene la correspondencia:

$$\begin{aligned} \partial_i &\leftrightarrow ik_i, \\ \tilde{h}_{0i}(\mathbf{k}) &= \tilde{\beta}_i(\mathbf{k}) + ik_i \tilde{\gamma}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\beta}(\mathbf{k}) = 0$ . Esto se puede relacionar con una descomposición en representaciones irreducibles del grupo  $SO(2)$  de rotaciones alrededor de un eje fijo  $\mathbf{k}$ . Estas representaciones están etiquetadas por la helicidad  $h$ .

Específicamente, lo modos son:

1. Modo tensorial
2. Modo escalar
3. Modo vectorial

# Evolución de las ondas gravitacionales

Del Sistema de ecuaciones

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \hat{\nu} \frac{d}{d\eta} + \hat{C}k^2 + \hat{N}k + \hat{M} \right] \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Nos centramos en la matriz de velocidades  $C$ , pues sus autovalores corresponden a las velocidades de fase según la ecuación de movimiento elegida junto con los modos de polarización.