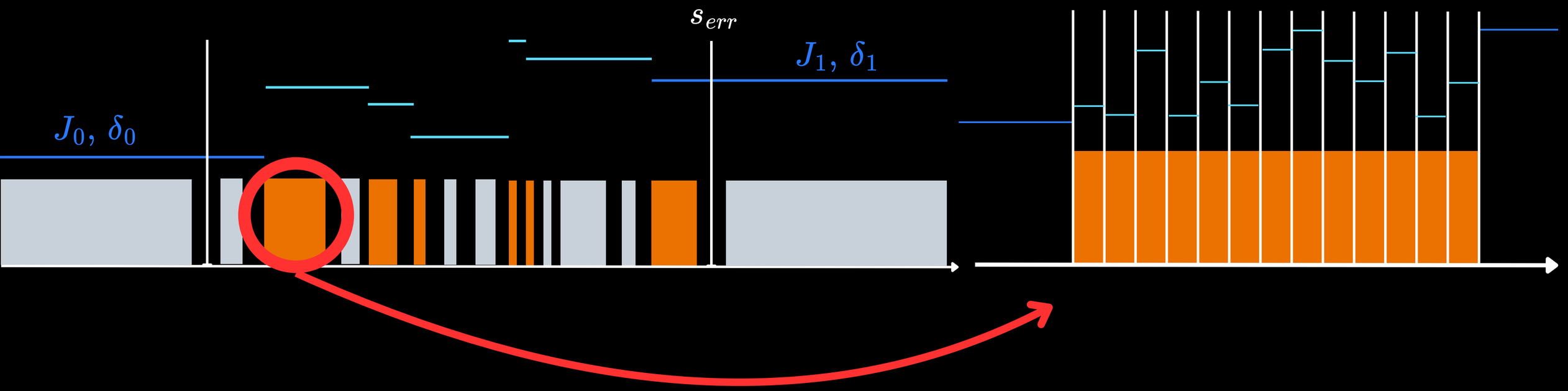
AVANCES gpAPJ
INTEGRALES GENERALES II

POR:
Santiago Andrés Acosta Díaz (saacostad@unal.edu.co)

PRESENTADO PARA:
Seminario Física de Aceleradores

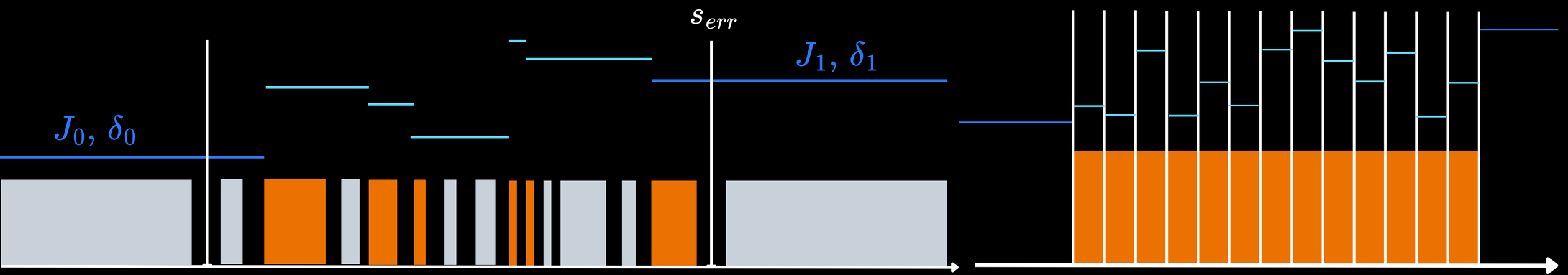
RESUMEN DE LA VEZ PASADA



Se propuso dividir cada cuadrupolo para poder considerar los avances de fase en cada sub-sección constantes. Sin embargo, **se pensaba** que el seno dentro de la integral no podía ser desecho

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_i \Delta K_i \sqrt{\beta_j} \sum_{ii} \frac{z_{ii}}{\sqrt{\beta_{ii}}} \int_{\mathrm{QP}_{ii}} \beta_{s_{ii}} \sin(\psi_j - \psi(s_{ii}))\, ds_{ii}$$

PROPUESTA MODIFICADA



Pero al final, el profesor mostró que, en efecto, este término resulta ser constante, por lo que la integral queda únicamente afectando la función ß.

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_{m_i} \Delta K_{m_i} z_{m_i} \sqrt{\beta_j} \frac{\int_{\mathrm{QP}_{m_i}} \beta(s_{m_i}) ds_{m_i}}{\sqrt{\beta_{m_i}}} \sin\left(\psi_j - \psi_{m_i}\right)$$

CONSIDERACIÓN IMPORTANTE

Δ*K* es el gradiente cuadrupolar integrado, es decir, tiene unidades de *gradiente magnético (normalizado) [1/m²]* por *distancia.* En nuestra expresión original, al usar el formalismo de ***lentes delgados,*** omitimos esta dimensión extra, pero ella aparece naturalmente al momento de hacer la integral.

¿Es esta longitud la que se debe usar?

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_{m_i} \Delta K_{m_i} z_{m_i} \sqrt{\beta_j} \frac{\int_{\mathrm{QP}_{m_i}} \beta(s_{m_i}) ds_{m_i}}{\sqrt{\beta_{m_i}}} \sin\left(\psi_j - \psi_{m_i}\right)$$

pero no tiene las mismas unidades que el machetazo, que ya vimos que funcionaba bien.

SISTEMA RESULTANTE

Aplicar este cambio al sistema, resulta en los siguientes cambios a los elementos de propagación.

$$M_{m_i j} = \sqrt{\beta_j} \frac{\int_{\mathrm{QP}_{m_i}} \beta(\boldsymbol{s}_{m_i}) d\boldsymbol{s}_{m_i}}{\sqrt{\beta_{m_i}}} \sin\left(\psi_j - \psi_{m_i}\right)$$

$$\vec{u} = \sin(\psi_i) \frac{\int \beta(\boldsymbol{s}_i) d\boldsymbol{s}_i}{\sqrt{\beta_i}} \qquad \vec{v} = \cos(\psi_i) \frac{\int \beta(\boldsymbol{s}_i) d\boldsymbol{s}_i}{\sqrt{\beta_i}}$$

REVISEMOS UNIDADES

$$\vec{u}\mathbf{\Delta K Q}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$\vec{v}\mathbf{\Delta K Q}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

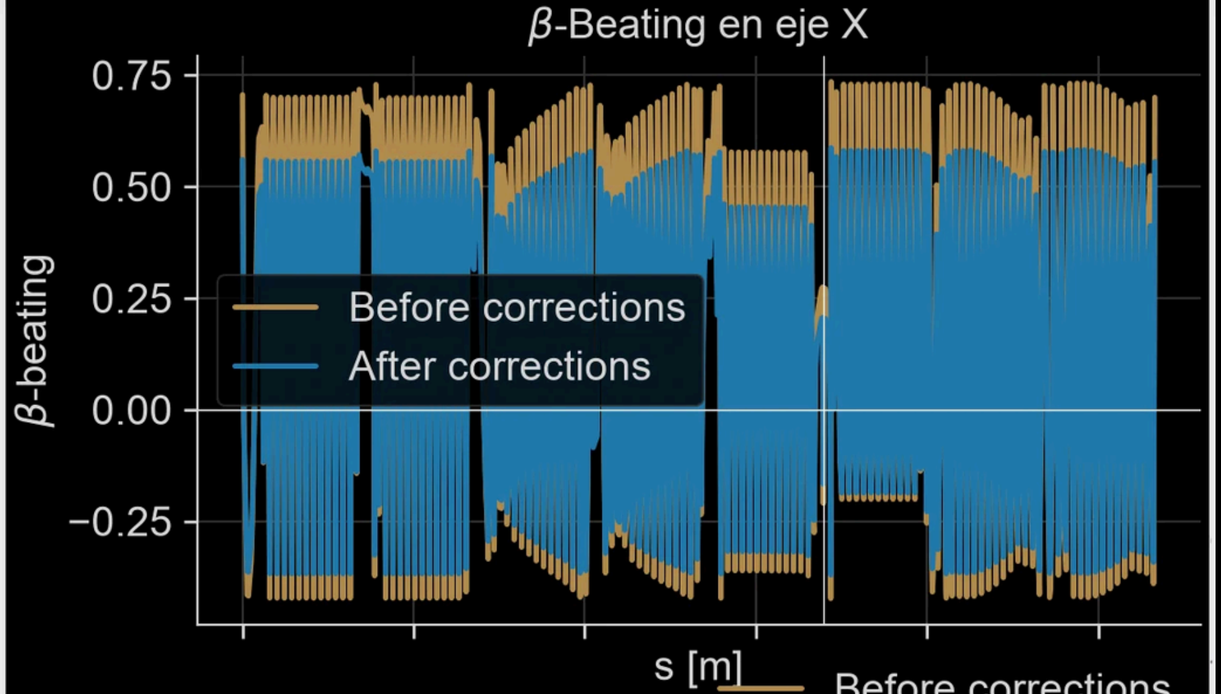
$$\vec{z} = \mathbf{Q}\vec{z}_0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{Q}] = 1$$

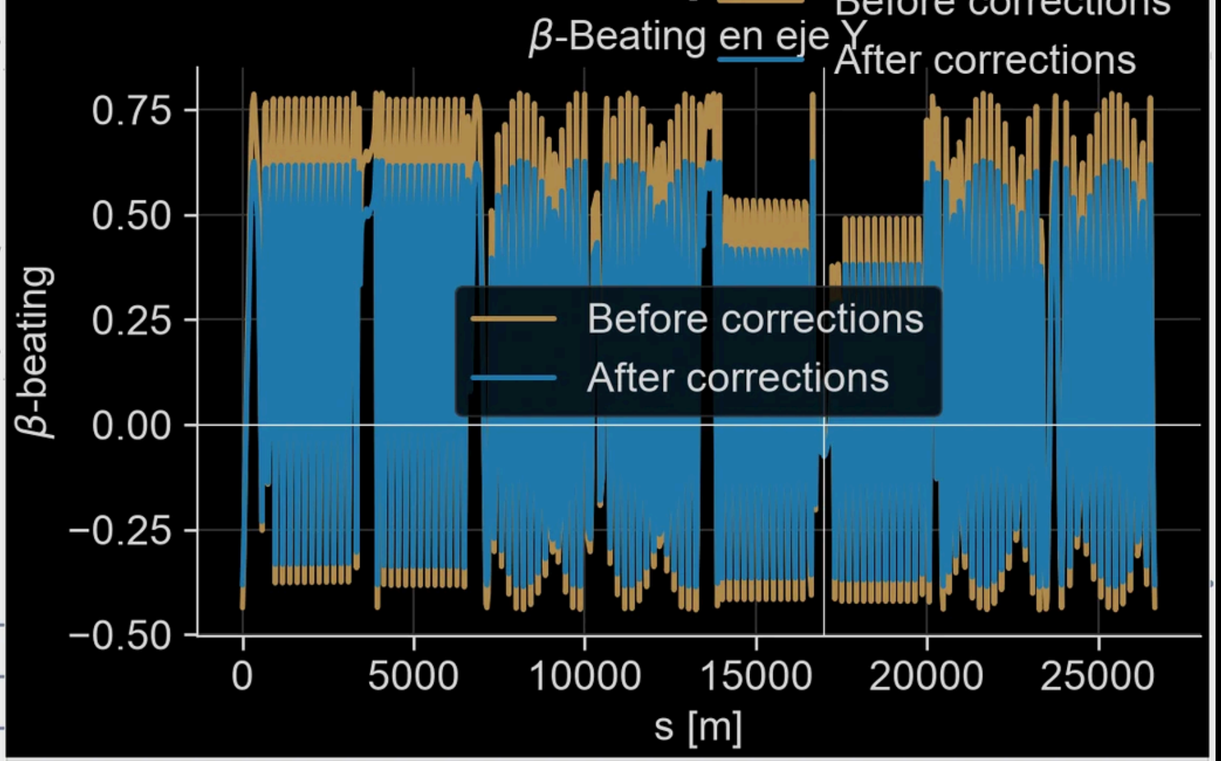
$$[\mathbf{\Delta K}] = 1/m^2$$

$$\vec{z}_0^{\star} = \frac{\vec{z}_0}{\sqrt{2J_0}} \Rightarrow [\vec{z}_0^{\star}] = \frac{m}{\sqrt{m}}$$

$$\vec{u} = \sin(\psi_i)\frac{\int \beta(s_i)ds_i}{\sqrt{\beta_i}} \quad \Rightarrow [\vec{u}] = L[m]\beta[m]/\sqrt{\beta[m]} = m^2/\sqrt{m}$$

y considerando que el lado derecho es adimensional, se puede ver que las unidades cuadran.



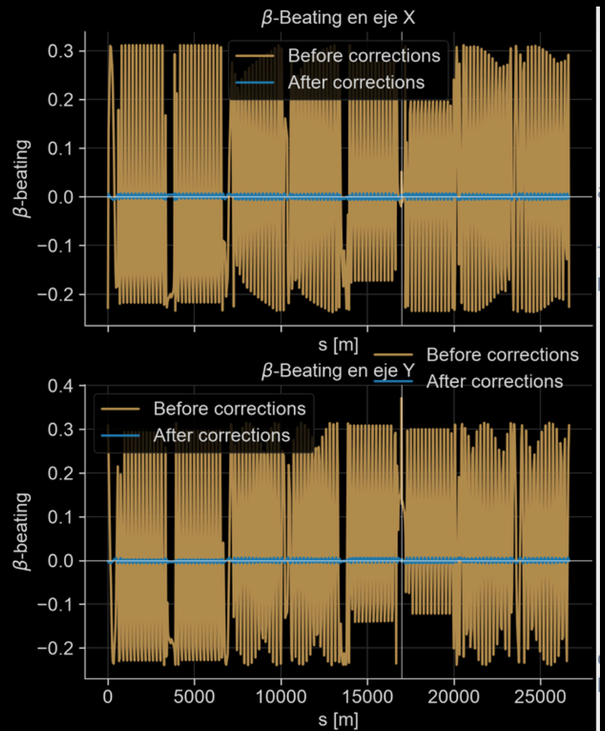


CONCLUSIONES

Pero no funciona así como así. ¿Posibles causas?

1. Bugs en el código.
2. Errores en la derivación teórica.
3. Las variables que estoy manejando (en le código) no tienen las unidades que son.
4. Estoy optimizando para $L\Delta K$ en vez de para ΔK.
5. Alguna combinación lineal de lo anterior.

sobre todo, es bastante inesperado considerando lo bien que el machetazo estaba dando resultados.



¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

El método del profesor se aprovecha de la órbita equivalente, al igual que el mío, pero en el suyo, se expresan las contribuciones a través de un único kick equivalente θe

$$z(s > R_e) = z_0(s) + \sigma\theta_e\sqrt{\beta(s_e)\beta(s)}\,\sin[\psi(s) - \psi(s_e)]$$

donde se define

$$\theta_e = \sigma B_{1,e}\underbrace{\sqrt{2J_0\beta_{z,e}}\,\sin(\psi(s_e) - \delta_0)}_{z(s_e)}$$

Es equivalente al ΔKL

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

El gpAPJ resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\vec{u}\mathbf{\Delta K Q}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0) \qquad \vec{v}\mathbf{\Delta K Q}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

Bajo la aproximación de fases, $\psi(s) \approx \psi(s_e)$

$$\mathbf{Q} = (1 - \sigma\mathbf{\Delta K M})^{-1}; \quad M_{i<j} = \sqrt{\beta_i \beta_j}\sin(\psi_j - \psi_i)$$

$$\mathbf{Q} \approx \mathbb{I}$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Por lo tanto, podemos escribir

$$\vec{u}\mathbf{\Delta K}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0) \qquad \vec{v}\mathbf{\Delta K}\vec{z}_0^{\star} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

donde $u_i = \sqrt{\beta_i}S_{\psi_i}$, $v_i\sqrt{\beta_i}C_{\psi_i}$, $z_{0i}^{*} = \sqrt{\beta_i}S[\psi_i - \delta_0]$

Lo anterior resulta ser la suma

$$\sum \beta_i \Delta K_i L_i S_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$\sum \beta_i \Delta K_i L_i C_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Hagamos el paso a la integral, considerando aproximación de fase

$$\beta_i \Delta K_i L_i \quad \rightarrow \quad \int \beta_i(s_i) \Delta K_i(s_i)\, ds_i$$

Hagamos el paso a la integral

$$S_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] \sum_i \Delta K_i \int \beta(s_i)\, ds_i = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$C_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] \sum_i \Delta K_i \int \beta(s_i)\, ds_i = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Utilizando la defición del Error del Gradiente Quadrupolar (APJ 2017)

$$B_{1,e} = \frac{1}{\beta_{z,e}} \sum_i \Delta K_i I_i; \quad I_i = \int \beta(s_i)\, ds_i$$

Hagamos el paso a la integral

$$S_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] \beta_{z,e} B_{1,e} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$C_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0] \beta_{z,e} B_{1,e} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} \cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Recordando nuevamente la definición del Kick equivalente, y multiplicando y diviendo por

$$\theta_e = \sigma B_{1,e}\sqrt{2J_0\beta_{z,e}}\sin(\psi(s_e) - \delta_0) \qquad \sigma\sqrt{2J_0\beta_{z,e}}$$

$$S_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0]\beta_{z,e}B_{1,e} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$C_{\psi_i} S[\psi_i - \delta_0]\beta_{z,e}B_{1,e} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}S_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}C_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$

Eso es, las ecuaciones del gpAPJ utilizando los elementos del APJ(2017) se escriben de esta manera

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Volviendo a la propuesta del APJ 2017, a partir de (1) y (2), se tiene

$$z(s > R_e) = z_0(s) + \sigma\theta_e\sqrt{\beta(s_e)\beta(s)}\,\sin[\psi(s) - \psi(s_e)]$$

$$= \sqrt{2J_1\beta(s)}\,\sin[\psi(s) - \delta_1]$$

eso es, se tiene que

$$\frac{\theta_e\sqrt{\beta_e}}{\sqrt{2J_0}}S[\psi_s - \psi_e] = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S[\psi_s - \delta_1] - S[\psi_s - \delta_0]$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Si expandimos los senos, tenemos

$$\frac{\theta_e\sqrt{\beta_e}}{\sqrt{2J_0}}\{S_sC_e - C_sS_e\} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\{S_sC_{\delta_1} - C_sS_{\delta_1}\} - \{S_sC_{\delta_0} - C_sS_{\delta_0}\}$$

e igualando los términos en las bases $\sin(\psi(s)),\ \cos(\psi(s))$, uno llega al sistema de ecuaciones

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}S_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}C_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$

¿EQUIVALENCIA CON EL MÉTODO DEL PROFE?

Eso es, el gpAPJ, expresado en los elementos del APJ 2017 y usando la aproximación de fases, propone ecuaciones que resuelven el mismo problema que el APJ 2017.

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}S_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$

$$\frac{\sqrt{\beta_{z,e}}C_{\psi_e}\theta_{z,e}}{\sigma\sqrt{2J_0}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}S_{\delta_1} - S_{\delta_0}$$