Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Santiago Acosta & Nicolás Manrique

Grupo de investigación en Aceleradores de Partículas

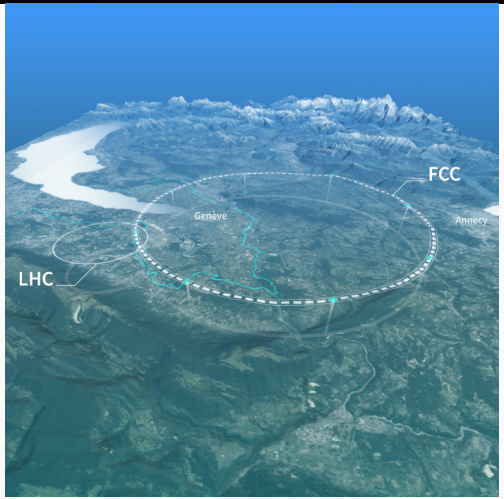
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá

Indice

Agenda

- FCC y algunos elementos en un acelerador de partículas
- Ecuación de betatrón y kick magnéticos
- Modelación APJ
- Corrección de errores con APJ
- APJ en el LHC
- APJ en otros aceleradores (FCC)

FCC



https://home.cern/science/accelerators/future-circular-collider

El **FCC** es un proyecto de acelerador de partículas circular de alta energía del **CERN**. Con una longitud total de 90.7KM y energías de hasta 100TeV (para el FCC-hh), se busca que este sea sucesor del actual **LHC**. Inicialmente el proyecto planea construir el FCC-ee para mediciones de precisión entre electrones y positrones, para luego ser reemplazado por el FCC-hh, un colisionador de protones e iones pesados.

Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Algunos elementos en un acelerador de partículas

Cavidades RF

Sistemas eléctricos encargados de acelerar el haz de partículas

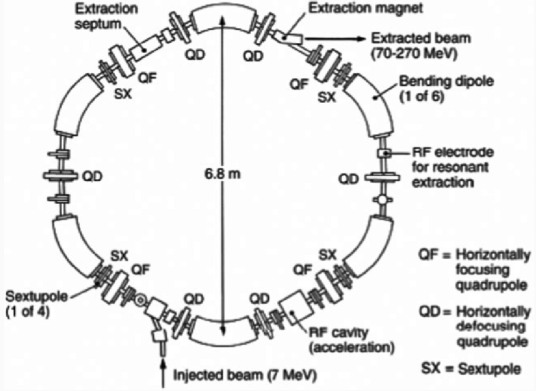
Dipolos

Sistemas magnéticos encargados de darle la órbita circular al haz de partículas.

cuadrupolos

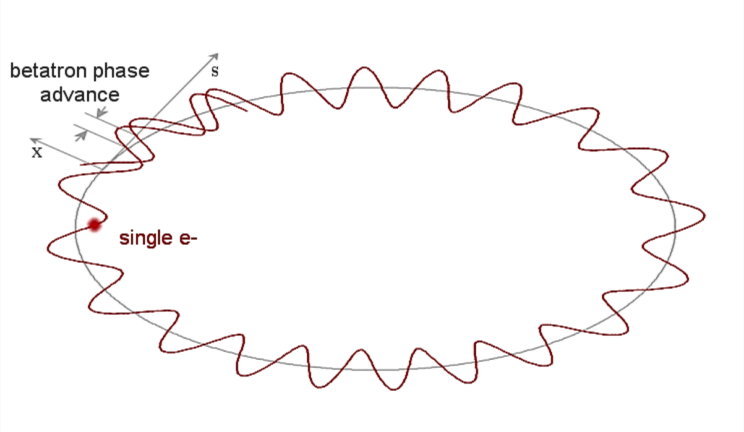
Sistemas magnéticos encargados de desviar partículas fuera de órbita nuevamente hacia el centro del haz.

En los aceleradores de partículas de tipo sincrotrón hay 3 elementos esenciales para controlar el movimiento de las partículas:



Peach, Jones & Wilson, Accelerator science in medical physics.

Ecuación de betatrón y kick magnético



Las partículas se mueven tanto longitudinalmente a través del radio del acelerador s, como transversalmente en el plano xy. Este movimiento en el plano xy es descrito mediante la *ecuación de betatrón*.

Ecuación de betatrón y kicks magnético

La ecuación de betatrón junto con errores magnéticos se ve como

$$z(s) = \underbrace{\sqrt{2J_0\,\beta_n(s)}\,\sin\left(\psi_n(s)+\delta_0\right)}_{\text{Ec. betatrón ideal}} + \underbrace{\sum_i^E \overbrace{\Delta K_i\,X_i}^{\text{kick }\theta_i}\,\sqrt{\beta_n(s_i)\,\beta_n(s)}\,\sin\left(\psi_n(s)-\psi_n(s_i)\right)}_{\text{contribución de errores magnéticos } \mathbf{M}} \tag{1}$$

F. Convencional

Las funciones ψ y β absorben $\mathbf{M}$

$$z_{\text{CNV}}(s) = \sqrt{2J_0\beta(s)}\,\sin\left(\psi(s)-\delta_0\right)$$

F. APJ

La J y δ absorben la $\mathbf{M}$

$$z_{\text{APJ}}(s) = \sqrt{2J(s)\beta_n(s)}\,\sin\left(\psi_n(s)-\delta(s)\right)$$

Modelación APJ

Esta modelación permite tratar los errores como **cambios en la acción y la fase**, tratando las funciones ψ y β como las nominales, las cuales son conocidas.

$$z(s) = \sqrt{2J_s\,\beta_{ns}}\,\sin\left(\psi_{ns} + \delta_s\right)$$

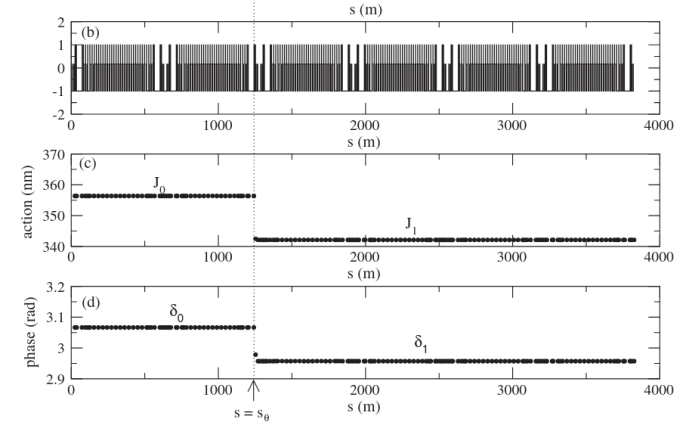


Figure 1: Gráficas de la red óptica del RHIC y simulaciones de la acción y la fase en el marco del modelo APJ

Correcciones con APJ

De esta manera, para corregir errores magnéticos primero hallamos su contribución en un punto de interés s, es decir, $\mathbf{M}$, y luego configuramos el sistema magnético de tal forma que obtengamos un término que lo anule, $\mathbf{M}_c = -\mathbf{M}$

$$z(s) = z_n(s) + \underbrace{\sum_{i}^{E} \theta_i \sqrt{\beta_{ni}\,\beta_{ns}}\,\sin\left(\psi_{ns} - \psi_{ni}\right)}_{\text{cont. error magnético } \mathbf{M}} + \underbrace{\sum_{j}^{C} \theta_j \sqrt{\beta_{nj}\,\beta_{ns}}\,\sin\left(\psi_{ns} - \psi_{nj}\right)}_{\text{cont. corrección magnética } \mathbf{M}_c}$$

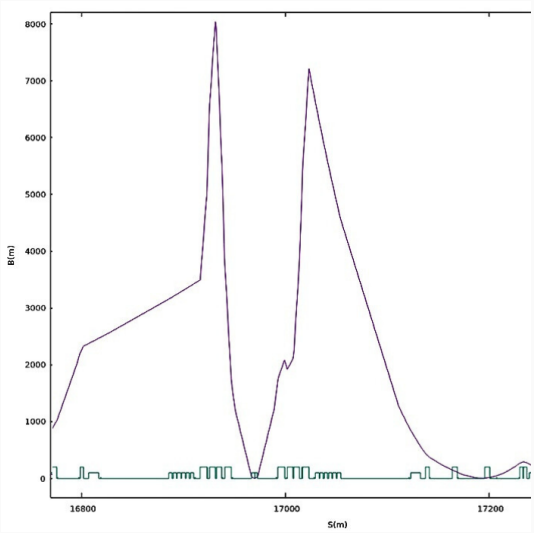
$$= z_n(s)$$

Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

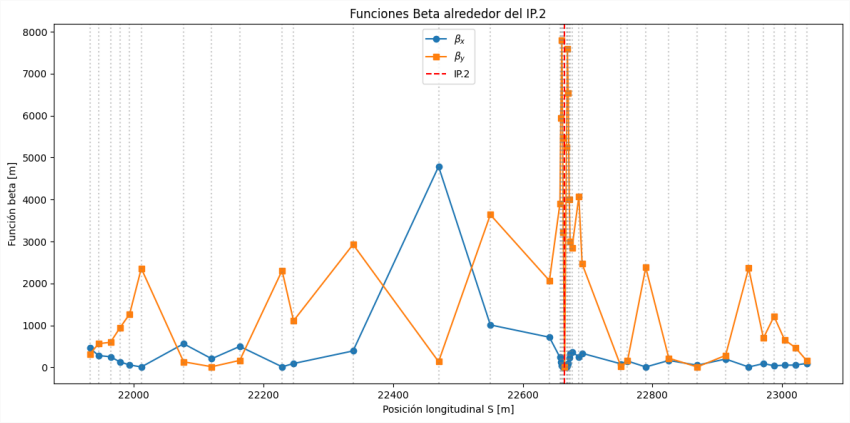
Región de interacción del LHC

En el **LHC** la distribución simétrica de cuadrupolos en la región de interacción genera una simetría en las funciones de red del acelerador, permitiendo encontrar *kicks equivalentes* θ_e que, al ser aplicado a dos cuadrupolos (uno por plano), genera la contribución opuesta al error total generado por el triplete de cuadrupolos

$$\mathbf{M}_e = -\sum_{i=1}^{3} \mathbf{M}_i$$



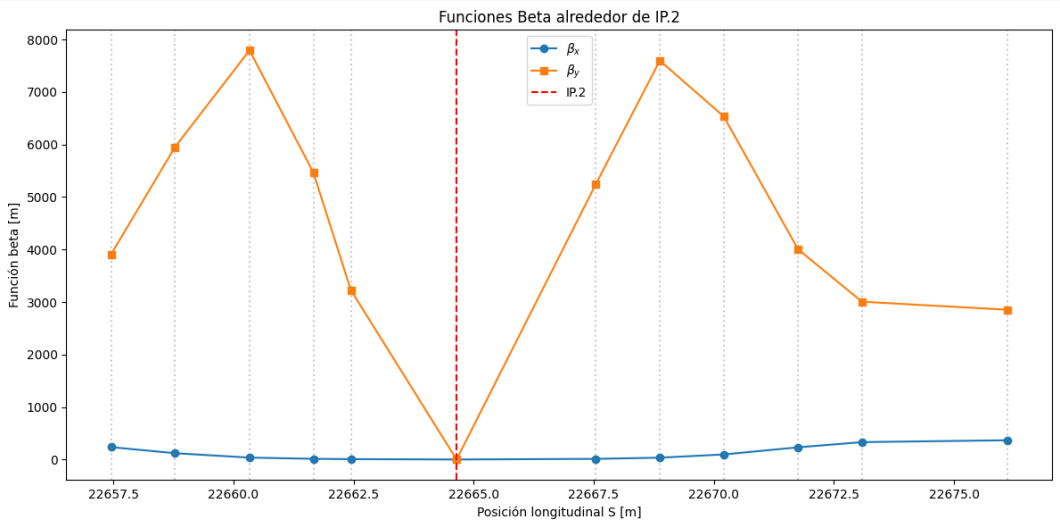
Región de interacción del FCC



La red óptica del FCC en la región de interacción **no es simétrica**, cosa que impide aplicar el tratamiento del LHC.

Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Región de interacción del FCC



Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Obtencion de las contribuciones de los kicks en el FCC

Para hacer las correcciones en el FCC, toca desarrollar el **caso general**, sin poder aprovecharnos de ninguna simetría.

Con esto en mente, podemos expandir el término $\mathbf{M}$ hasta segundo orden en ΔK_i como

$$\mathbf{M} = \sqrt{2J_0\beta_{ns}}\left\{S_{\psi_{ns}}\left[C_{\delta_0}\Omega_{sc} - S_{\delta_0}\Omega_{ss}\right] + C_{\psi_{ns}}\left[S_{\delta_0}\Omega_{cs} - C_{\delta_0}\Omega_{cc}\right]\right\}$$

NOTA: *se está utilizando la notación* $\sin(x) \rightarrow S_x$ *y* $\cos(x) \rightarrow C_x$

con coeficientes Ω dados por

Obtencion de las contribuciones de los kicks en el FCC

$$\Omega_{sc} = \sum_{i=1}^{E} \left\{ \Delta K_i \beta_{ni} S_{\psi_i} C_{\psi_i} + (1-\delta_{1i}) C_{\psi_i} \Delta K_i \beta_{ni} \sum_{j=1}^{i-1} \left[S_{\psi_j} S_{\psi_i - \psi_j} \Delta K_j \beta_{nj} \right] \right\}$$

$$\Omega_{ss} = \sum_{i=1}^{E} \left\{ \Delta K_i \beta_{ni} C_{\psi_i}^2 + (1-\delta_{1i}) C_{\psi_i} \Delta K_i \beta_{ni} \sum_{j=1}^{i-1} \left[C_{\psi_j} S_{\psi_i - \psi_j} \Delta K_j \beta_{nj} \right] \right\}$$

$$\Omega_{cs} = \sum_{i=1}^{E} \left\{ \Delta K_i \beta_{ni} S_{\psi_i} C_{\psi_i} + (1-\delta_{1i}) S_{\psi_i} \Delta K_i \beta_{ni} \sum_{j=1}^{i-1} \left[C_{\psi_j} S_{\psi_i - \psi_j} \Delta K_j \beta_{nj} \right] \right\}$$

$$\Omega_{cc} = \sum_{i=1}^{E} \left\{ \Delta K_i \beta_{ni} S_{\psi_i}^2 + (1-\delta_{1i}) S_{\psi_i} \Delta K_i \beta_{ni} \sum_{j=1}^{i-1} \left[S_{\psi_j} S_{\psi_i - \psi_j} \Delta K_j \beta_{nj} \right] \right\}$$

Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Obtencion de las contribuciones de los kicks en el FCC

Ahora, experimentalmente se pude hallar el valor de $\mathbf{M}$ a partir de la diferencia de la posición en z antes y después de la región a analizar

$$\sqrt{2J_1\beta_{ns}}\sin(\psi_{ns}-\delta_1)-\sqrt{2J_0\beta_{ns}}\sin(\psi_{ns}-\delta_0)=\mathbf{M}_{exp}$$

constante que podemos expandir en las bases $\{\sin(\psi_{ns}),\cos(\psi_{ns})\}$ como

$$\mathbf{M}_{exp}=\sin(\psi_{ns})\Xi_s+\cos(\psi_{ns})\Xi_c$$

Obtencion de las contribuciones de los kicks en el FCC

Donde cada coeficiente Ξ puede ser expandido en las bases de $\{\sin(\delta_0), \cos(\delta_0)\}$ para así hallar los respectivos valores de Ω, los cuales tienen toda la información de los errores magnéticos de cada cuadrupolo ΔK

$$\Xi_s = \frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(C_{\delta_0}\Omega_{sc} - S_{\delta_0}\Omega_{ss}\right) \qquad \Xi_c = \frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(S_{\delta_0}\Omega_{cs} - C_{\delta_0}\Omega_{cc}\right)$$

Esto aplica para mediciones en ambos planos x e y, es decir, podemos obtener 4 ecuaciones de una única medición de acción y fase.

Solución del sistema de ecuaciones

Sin embargo, tenemos **8 incógnitas**, pues cada uno de los 4 términos Ω necesita ser encontrado tanto para el plano x como el plano y. Por lo tanto, necesitamos de **8 ecuaciones** para solucionar el sistema.

$$\Omega_{sc}^{x/y} = \sum_{i=1}^{E} \Big\{ \Delta K_i \beta_{ni}^{x/y} S_{\psi_i^{x/y}} C_{\psi_i^{x/y}} + (1-\delta_{1i}) C_{\psi_i^{x/y}} \Delta K_i \beta_{ni}^{x/y} \sum_{j=1}^{i-1} \left[S_{\psi_j^{x/y}} S_{\psi_i^{x/y} - \psi_j^{x/y}} \Delta K_j \beta_{nj}^{x/y} \right] \Big\}$$

Solución del sistema de ecuaciones

Para poder obtener nuevas ecuaciones, podemos tomar una **nueva medida de acción y fase** variando el $\delta_0 \rightarrow \delta_0'$, el cual se puede controlar como condición inicial de la puesta en marcha del acelerador, obteniendo así otras nuevas 4 mediciones de Ξ para los mismos errores magnéticos ΔK, agregando 4 nuevas ecuaciones al sistema.

$$\delta_0 \longrightarrow \delta_0'$$

Solución del sistema de ecuaciones

De esta manera, a priori, se piensa solucionar un sistema de ecuaciones 8x8 en ΔK a través de métodos de optimización numérica.

$$\frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(C_{\delta_0}\Omega_{sc}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)-S_{\delta_0}\Omega_{ss}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)\right)=\Xi_s^x(\delta_0)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(S_{\delta_0}\Omega_{cs}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)-C_{\delta_0}\Omega_{cc}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)\right)=\Xi_c^x(\delta_0)$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(C_{\delta_0'}\Omega_{sc}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)-S_{\delta_0'}\Omega_{ss}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)\right)=\Xi_s^y(\delta_0')$$
$$\frac{1}{\sqrt{2J_0\beta_{ns}}}\left(S_{\delta_0'}\Omega_{cs}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)-C_{\delta_0'}\Omega_{cc}\left(\Delta K_1,\cdots,\Delta K_M\right)\right)=\Xi_c^y(\delta_0')$$

Solución del sistema de ecuaciones

Problema

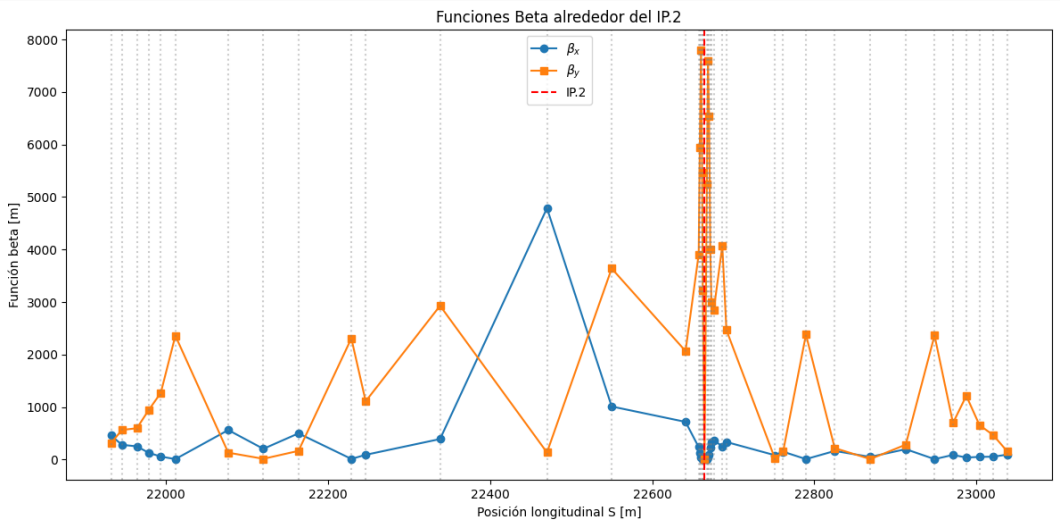
La gran variación entre las funciones β de los cuadrupolos en la región de interacción (de hasta 3 órdenes de magnitud) hace que el sistema de ecuaciones sea *ill-conditioned*, lo que dificulta enormemente solucionarlo.

¿Cómo solucionar este problema?

Dividiendo la región de interacción en 3 sub-regiones, cada una con magnitudes de las funciones beta similares, evitando así que cada sub-región genere un sistema de ecuaciones ill-conditioned.

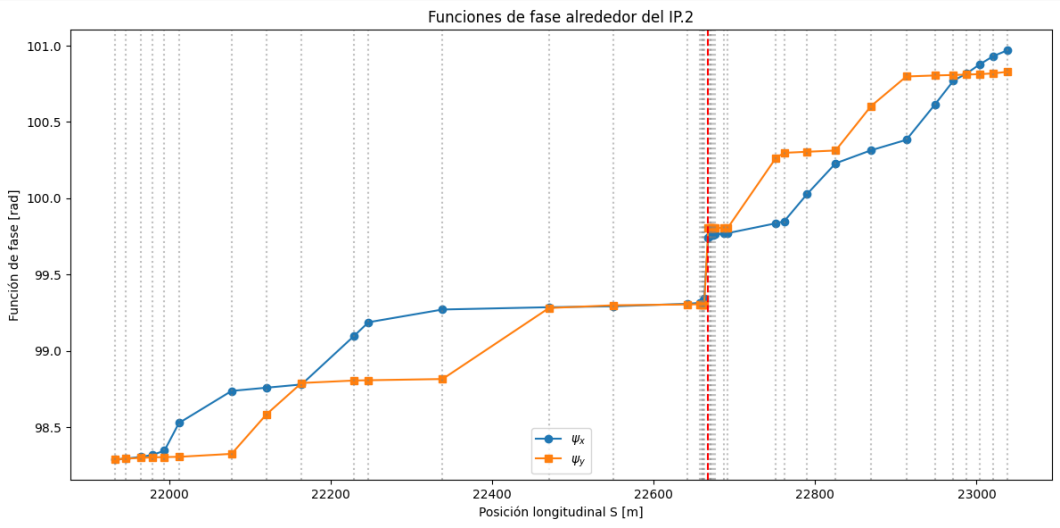
Para esto, se necesitan medidas de la acción y la fase dentro de la región de interacción, es decir, se requiere instalar BPMs dentro de las sub-regiones.

Región de interacción del FCC



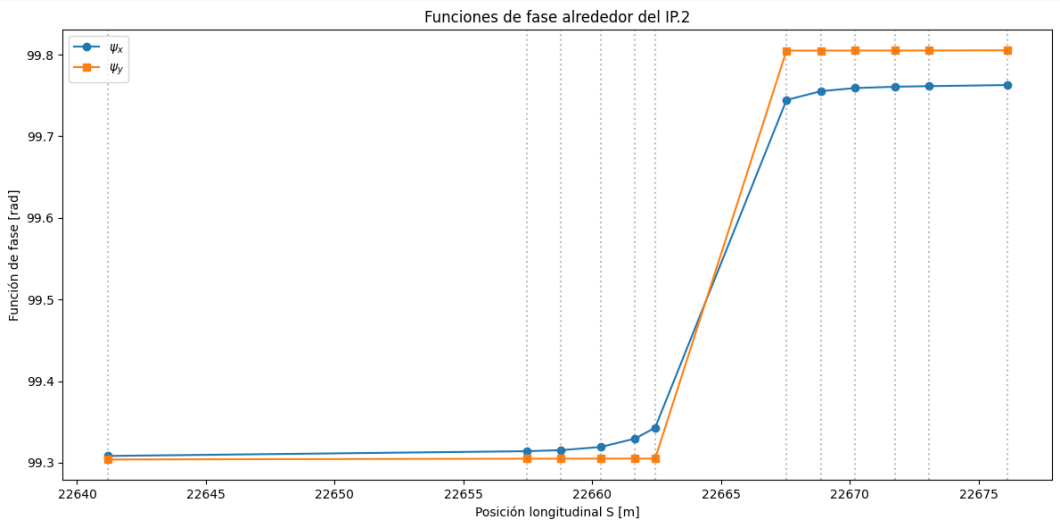
Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Región de interacción del FCC



Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Región de interacción del FCC



Corrección de errores cuadrupolares con APJ en las regiones de interacción del FCC.

Referencias

(1) Cardona, Javier F., and Stephen G. Peggs. "Linear and Nonlinear Magnetic Error Measurements Using Action and Phase Jump Analysis." Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, vol. 12, no. 1, Jan. 2009, p. 014002. DOI.org (Crossref), https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.12.014002.

(2) Cardona, Javier Fernando, Yohany Rodríguez, et al. "A Twelve-Quadrupole Correction for the Interaction Regions of High-Energy Accelerators." arXiv:2002.05836, arXiv, 14 Feb. 2020. arXiv.org, https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.05836.

(3) Cardona, Javier Fernando. "Calibration of Beam Position Monitors for High Energy Accelerators Based on Average Trajectories." arXiv:2103.03964, arXiv, 5 Mar. 2021. arXiv.org, https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.03964.

(4) Cardona, Javier Fernando, Alba Carolina García Bonilla, et al. "Local Correction of Quadrupole Errors at LHC Interaction Regions Using Action and Phase Jump Analysis on Turn-by-Turn Beam Position Data." Physical Review Accelerators and Beams, vol. 20, no. 11, Nov. 2017, p. 111004. DOI.org (Crossref), https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.111004.

FIN

AUXILIARES

$$\mathbf{M} = \sum_{i}^{E} \overbrace{\Delta K_i \, X_i}^{\text{kick } \theta_i} \sqrt{\beta_n(s_i)\,\beta_n(s)}\, \sin\left(\psi_n(s) - \psi_n(s_i)\right)$$

donde

$$X_{i+1} = \sqrt{J_0 \beta_{i+1}} \sin\left(\psi_{i+1} - \delta_0\right) + \sum \Delta K_i X_i \sqrt{\beta_i \beta_{i+1}} \sin\left(\psi_{i+1} - \psi_i\right)$$

y por ende

$$\mathbf{M} = \sqrt{2 J_0 \beta_{ns}} \left\{ S_{\psi_{ns}} \left[C_{\delta_0} \Omega_{sc} - S_{\delta_0} \Omega_{ss} \right] + C_{\psi_{ns}} \left[S_{\delta_0} \Omega_{cs} - C_{\delta_0} \Omega_{cc} \right] \right\}$$

Viendo los saltos en la acción y la fase, no tan solo podemos determinar la **posición** s_θ del error magnético, si no también su **kick**, es decir

$$|\theta| = \sqrt{\frac{2J_0 + 2J_1 - 4\sqrt{J_0 J_1}\cos(\delta_1 - \delta_0)}{\beta_{s_\theta}}} \qquad \theta = \frac{\sqrt{2J_0}\sin(\delta_0 - \delta_1)}{\sqrt{\beta_{s_\theta}}\sin(\delta_1 - \psi_{s_\theta})}$$

que está **diectamente relacionado** con la fuerza del error magnético.