AVANCES GAPJ
INTEGRALES GENERALES

POR:
Santiago Andrés Acosta Díaz (saacostad@unal.edu.co)

PRESENTADO PARA:
Seminario Física de Aceleradores

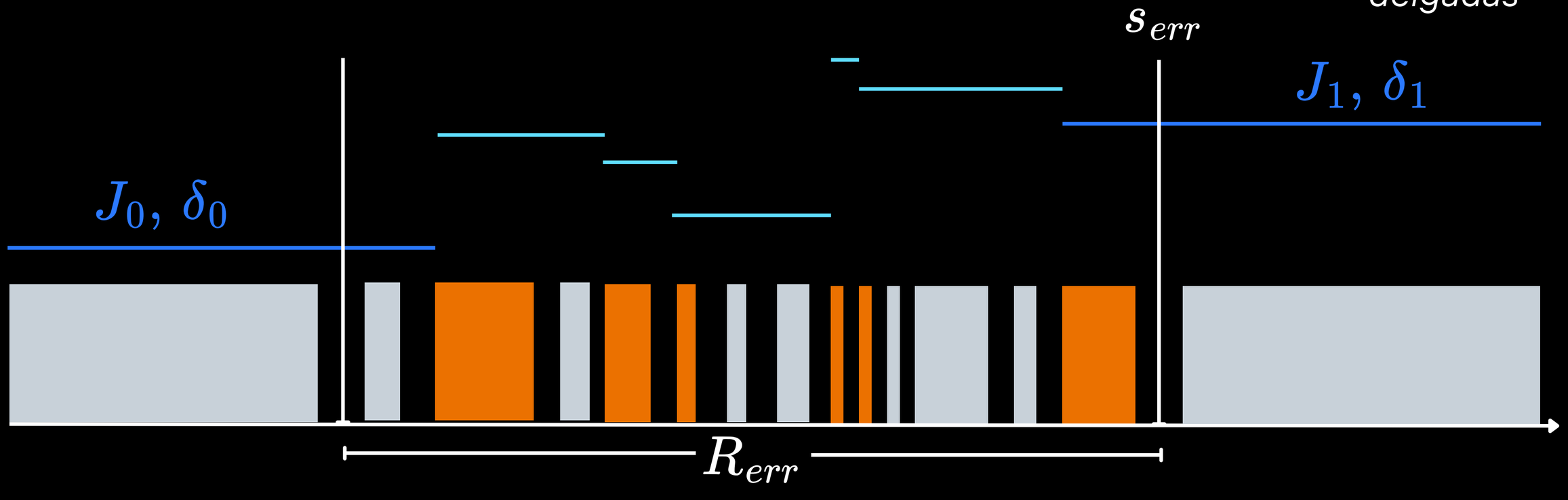
La posición transversal después de una región con errores es

$$z(s > s_{err}) = \sqrt{2J_0\beta_s}\sin(\psi_s - \delta_0) + \sigma\sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\beta_s\beta_i}\sin(\psi_s - \psi_i)$$

que es reescrita como

$$z(s > s_{err}) = \sqrt{2J_1\beta_s}\sin(\psi_s - \delta_1)$$

Es un formalismo para lentes delgadas



En mi proyecto de grado, se propuso una forma general de escribir la ecuación anterior a través de una propagación de la órbita antes de la región con los errores...

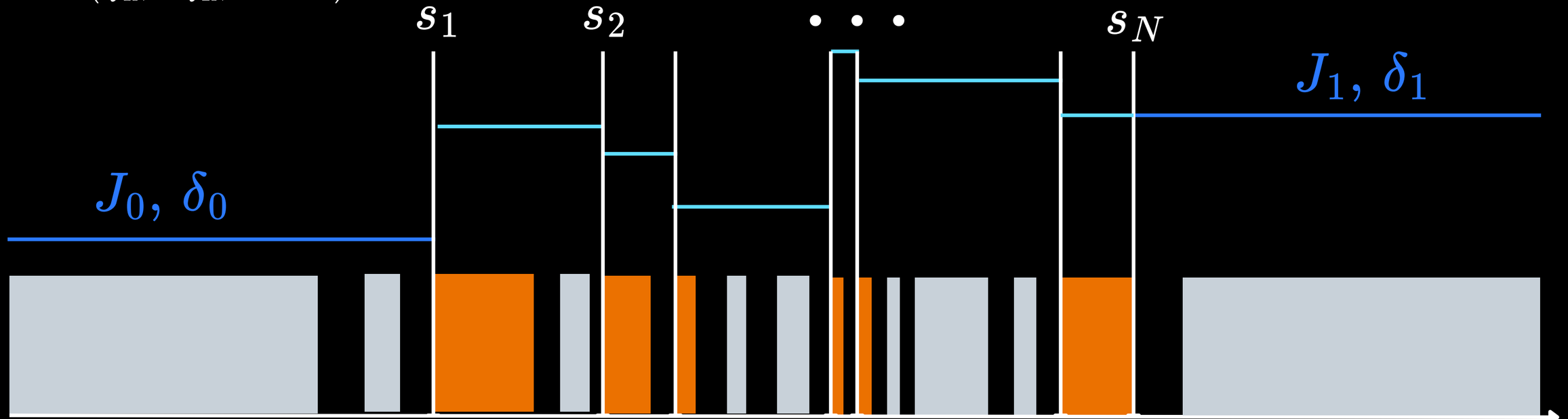
$$\vec{z} = (1 - \sigma \mathbf{M}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{K})^{-1}\,\vec{z}_0 = \mathbf{Q}\vec{z}_0.$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \sin(\psi_i - \psi_j)\sqrt{\beta_i \beta_j} & j < i \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

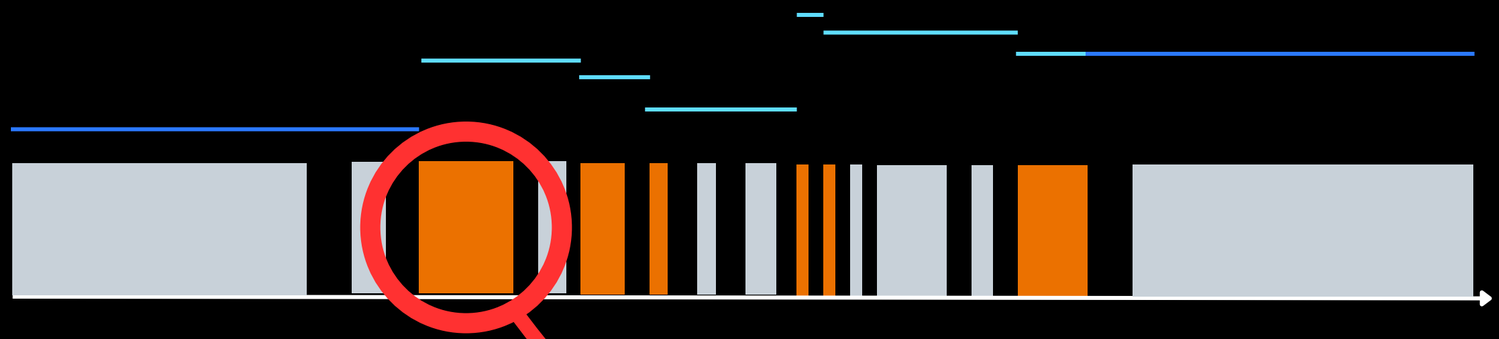
es estricatamente triangular inferior

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{12} & 1 & \cdots & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1N} & Q_{2N} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: cambios en la trayectoria nominal pueden ser representados con un salto de acción y fase



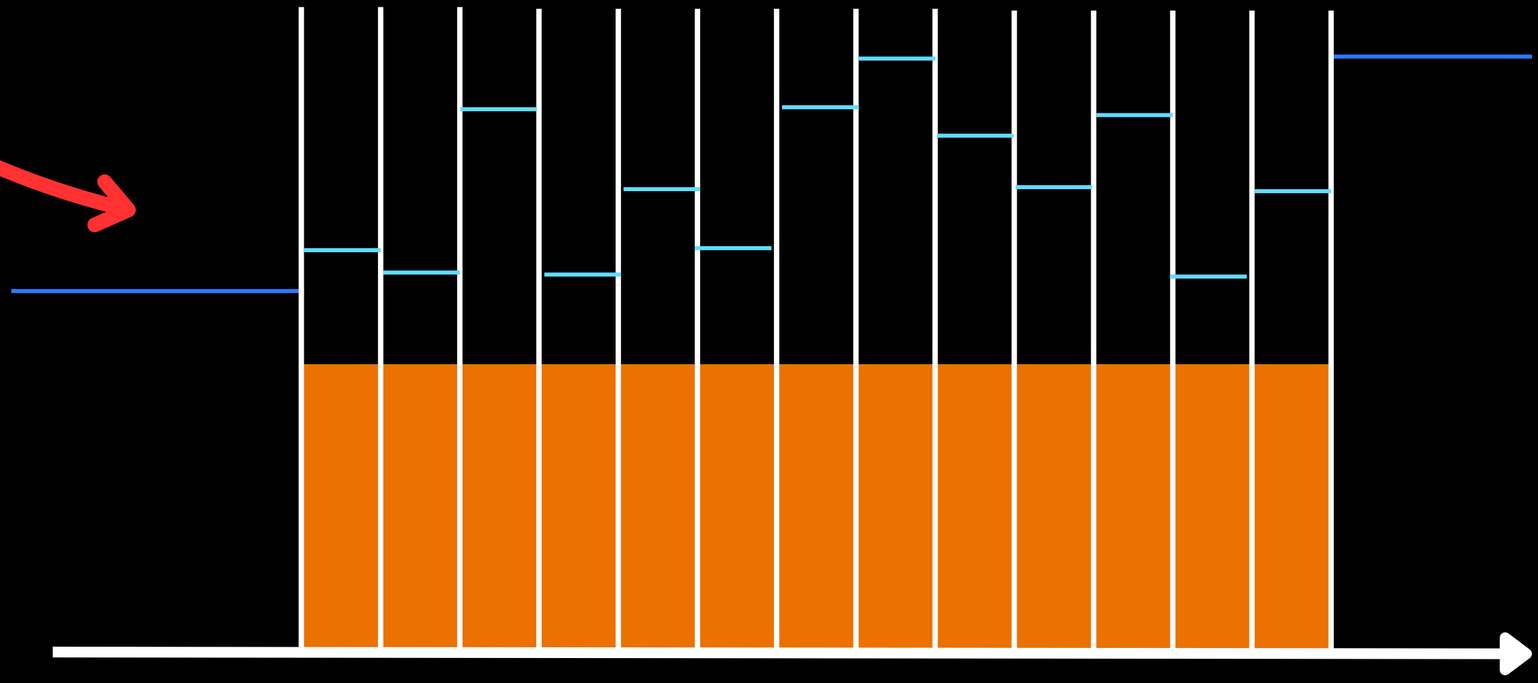
Pero en realidad, los cuadrupolos tienen funciones de red cambiantes en su interior. Si miramos cómo se propaga este error al interior de un cuadrupolo, veremos



$$\beta(s) = \beta_e C\left[\sqrt{K}s\right]^2 - 2C\left[\sqrt{K}s\right]S\left[\sqrt{K}s\right] + \frac{1+\alpha_e}{\beta_e}S\left[\sqrt{K}s\right]^2$$

$$\psi(s) = \psi(s_0) + \int_0^s \frac{1}{\beta(s)}ds$$

Es como si tuviésemos múltiples cuadrupolos con un mismo error propagánso a la siguiente sección del mismo cuadrupolo.

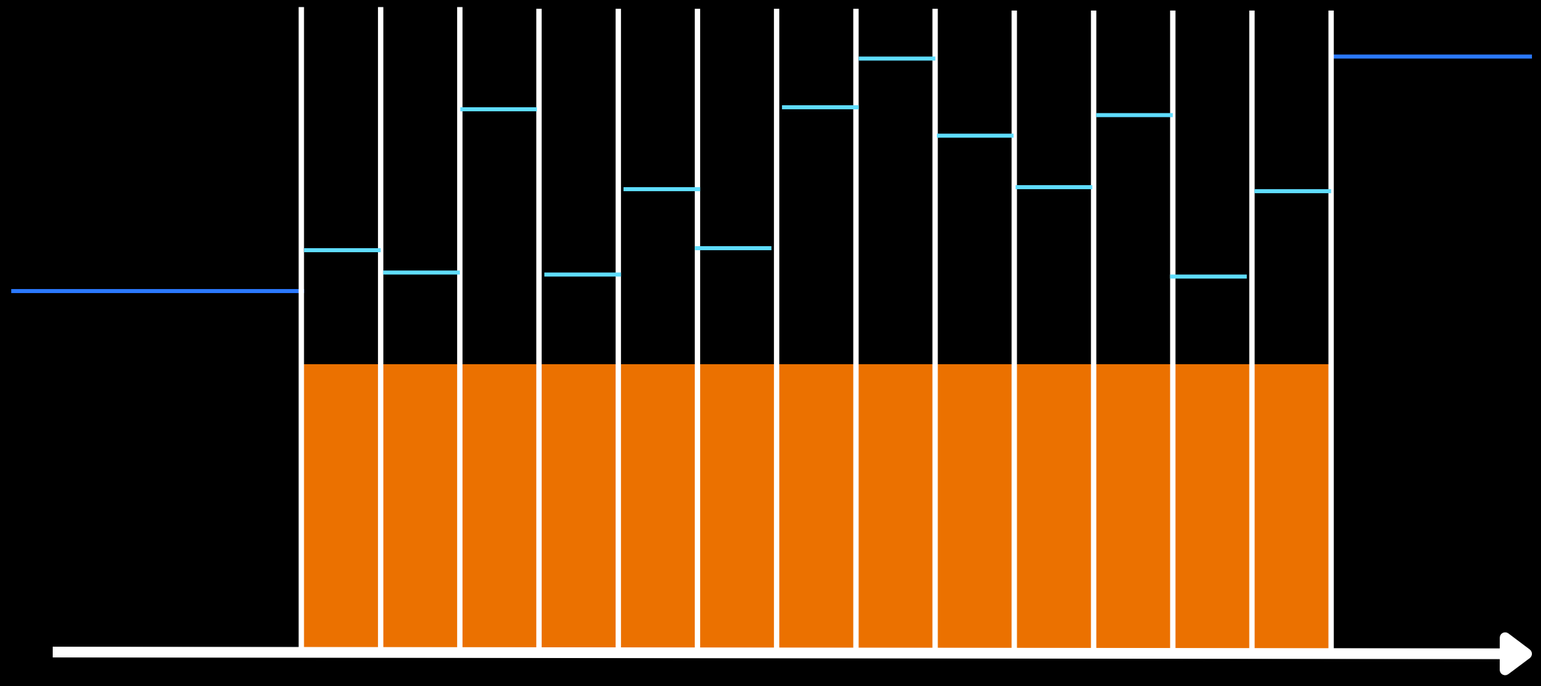


Para solucionar este problema, uno puede pensar en hacer la integral del término de contribución debido a los errores en cada uno de los cuadrupolos.

$$\Delta z(s) = \sigma \sum_i \int_{\mathrm{QP}_i} \Delta K_i(s_i) z(s_i) \sqrt{\beta(s)\beta(s_i)} \sin\left(\psi(s) - \psi(s_i)\right) ds_i$$

consideramos un error de gradiente constante, y las funciones ópticas las podemos integrar usando la su propagación a partir de sus valores iniciales (expresiones analíticas).

El problema es **cómo propagar *z*** dentro del cuadrupolo.



En su momento, Pr. Cardona resolvió este problema explotando la aproximación de fases.

$$\boxed{\Delta\psi_{IR}^{L|R} \approx 0 \qquad \Delta\psi_{IP} = \psi_{IR}^{R} - \psi_{IR}^{L} \approx \pi\,\mathrm{rad}}$$

y escribiendo

$$\frac{z(s_i)}{z_i} = \frac{\sqrt{2J\beta(s_i)}\sin(\psi(s_i) - \delta)}{\sqrt{2J\beta_i}\sin(\psi_i - \delta)} \quad \Rightarrow \quad z(s_i) = \sqrt{\frac{\beta(s_i)}{\beta_i}}\, z_i$$

expresa la trayectoria nominal, no tiene en cuenta el error

Lo que permite reescribir

caso genereal

Ambas son iguales

$$\Delta z(s) = \sigma \sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_i}} \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(s_i) \frac{\sin(\psi(s_i) - \delta)}{\sin(\psi_i - \delta)} \sin(\psi(s) - \psi(s_i))\, ds_i$$

permanece constante

como

$$\Delta z(s) = \sigma \sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_i}} \sin(\psi(s) - \psi_i) \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(s_i)\, ds_i$$

a partir de donde se hacen todos los demás cálculos.

¿Qué ocurre en el FCC?

LHC

cuadrupolos de correccion izquierda

"mqxa.3l1"	16916.549	38.913508	38.394249
"mqsx.3l1"	**16923.165**	**38.913773**	**38.394408**
"mqxb.b2l1"	**16925.834**	**38.913847**	**38.394503**
"mqxb.a2l1"	16932.334	38.913982	38.394887

cuadrupolos de correccion derecha

"mqxa.1r1"	16992.849	39.410453	38.891903
"mqxb.a2r1"	17001.934	39.411168	38.89241
"mqxb.b2r1"	17008.434	39.411697	38.892556
"mqsx.3r1"	17016.381	39.412097	38.892737
"mqxa.3r1"	17016.849	39.412111	38.892751
"mqy.4r1.b1"	17137.737	39.422533	38.899382

Hay un avance de fase de 0.006 radianes (0.3 grados)

FCC viejo

cuadrupolos de correccion izquierda

"qc5l.1"	22335.361	99.26953	98.814867
"qc4l.1"	**22467.295**	**99.285791**	**99.276616**
"qc3l.1"	**22547.152**	**99.291328**	**99.298411**
"qc0l.1"	**22638.287**	**99.30773**	**99.303757**
"qc2l2.1"	22656.204	99.313456	99.30491

cuadrupolos de correccion derecha

"qc2r2.2"	22671.835	99.760725	99.805029
"qc0.2"	**22673.205**	**99.761469**	**99.805095**
"qc3.2"	**22683.666**	**99.766797**	**99.805599**
"qc4.2"	**22688.74**	**99.770007**	**99.8058**
"qc5.2"	22748.591	99.830052	100.21844

Hay un avance de fase de 0.09 radianes (5 grados)

La aproximación ya no es tan precisa

EL MACHETAZO

En el gAPJ, el sistema de ecuaciones que se está solucionando es

$$\vec{v}^T \mathbf{\Delta K}\, \mathbf{Q}\vec{z}_0^* = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\cos(\delta_1) - \cos(\delta_0)$$

$$\vec{u}^T \mathbf{\Delta K}\, \mathbf{Q}\vec{z}_0^* = \sqrt{\frac{J_1}{J_0}}\sin(\delta_1) - \sin(\delta_0)$$

donde

$$v_i = \sqrt{\beta_i}\cos(\psi_i),\ \ u_i = \sqrt{\beta_i}\sin(\psi_i)$$

depende de

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \sin(\psi_i - \psi_j)\sqrt{\beta_i\beta_j} & j < i \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

¿Cómo se metieron las integrales?:
parecía lógico en su entonces y daba resultados, entonces nunca me puse a revisar su veracidad.

$$\beta_i \longrightarrow \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(\boldsymbol{s}_i)\, d\boldsymbol{s}_i$$

EL MACHETAZO

Matemáticamente, el machetazo es equivalente a pasar de la ecuación real

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\frac{\beta_j}{\beta_i}} \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(s_i) \frac{\sin(\psi(s_i) - \delta)}{\sin(\psi_i - \delta)} \sin(\psi_j - \psi(s_i))\, ds_i$$

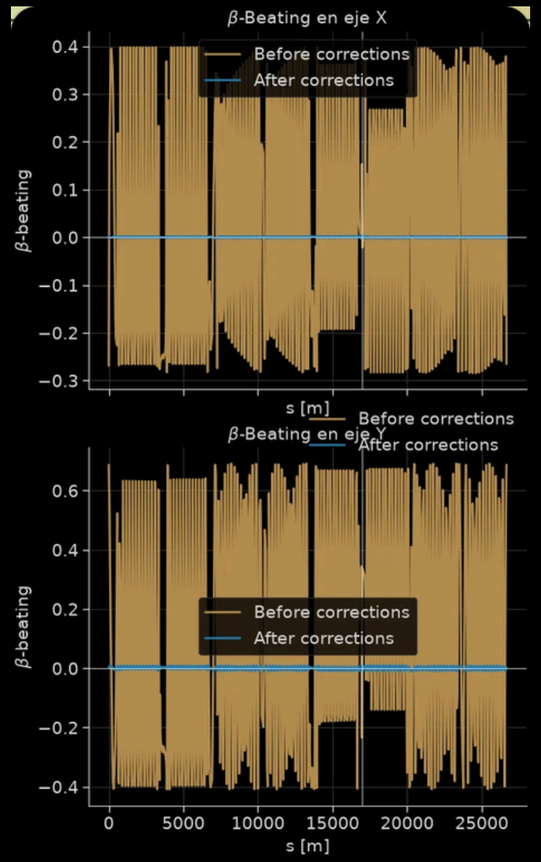
a

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\int_{\mathrm{QP}_j} \beta(s_j)\, ds_j \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(s_i)\, ds_i}\ \sin(\psi_j - \psi_i)$$

el porqué funciona es una pregunta abierta...

LHC

usando integrales

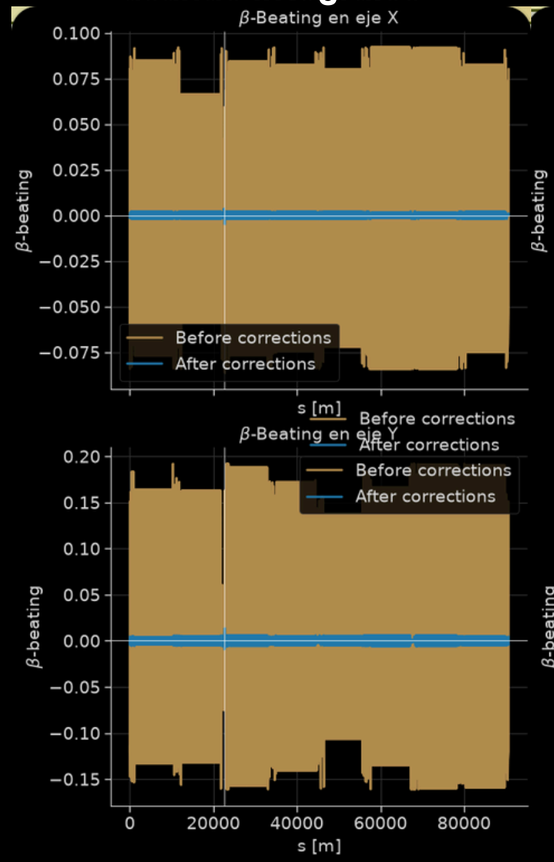


sin integrales

Las correcciones simplemente hacen que la órbita resuene

FCC

usando integrales



sin integrales

Usando *El Machetazo:* en el LHC, obtenemos normalmente beta-beatings residuales de menos del 0.5%. En el FCC, suelen ser de al readedor del 1-2%. En casos anómalos, del 5-10%.

Usando los valores del inicio del cuadrupolo: las correcciones directamente no funcionan,

De alguna u otra manera, *El Machetazo* es una buena primera aproximación

¿QUÉ SIGUE?

Plantear otro tratamiento matemático

Trabajar con la ecuación real da complicaciones importantes, sobre todo, complica bastante la forma separar las bases $\sin(\psi),\ \cos(\psi)$, necesarias para llegar a un sistema de ecuaciones, así como agrega términos difíciles de tratar.

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_i \Delta K_i z_i \sqrt{\frac{\beta_j}{\beta_i}} \int_{\mathrm{QP}_i} \beta(s_i) \frac{\sin(\psi(s_i) - \delta)}{\sin(\psi_i - \delta)} \sin(\psi_j - \psi(s_i))\, ds_i$$

1ra Solución temprana: separemos los cuadrupolos correctores en diferentes secciones para poder utilizar la aproximación de fases dentro de ellos, eso es

$$\Delta z(s_j) = \sigma \sum_i \Delta K_i \sqrt{\beta_j} \sum_{ii} \frac{z_{ii}}{\sqrt{\beta_{ii}}} \int_{\mathrm{QP}_{ii}} \beta_{s_{ii}} \sin(\psi_j - \psi(s_{ii}))\, ds_{ii}$$

no soluciona el problema de separar las bases

CONCLUSIONES

1. *El Machetazo* parece ser una buena primera aproximación, y parece mejorar cuando se puede usar la aproximación de fases.

2. De todas formas, no tenemos cómo defenderlo.

3. El problema principal para agregar estas “integrales generales” es reexpresar la separación de las bases de los avances de fase.