

JT重力と双曲幾何

以下 $c = \hbar = k_B = 1$. Euclidean だけ考え.

Jackiw-Teitelboim (JT) 重力 ... 2次元重力理論の1つ.

目標 ① JT重力の分配関数の計算手法とその周辺知識(双曲幾何 など)の概説.

- Out line
1. 導入, ... JT重力とは? なぜJT重力がおもしろいのか?
 2. 古典論 ... 作用, EDM, 古典解, 対称性.
 3. 分配関数 ... Weil-Petersson体積, Schwarz理論 積分測度の決定.
 4. Moduli空間 ... Moduli空間, Mirzakhani漸化式
 5. Schwarz理論 ... Duistermaat Heckman 公式.
 6. まとめ
 7. 応用.

JT重力の参考文献

Review : Mertens, Turiaci [2210.10846], Turiaci [2412.09537] など

Saad-Shenker-Stanford [1903.1115] Stanford-Witten [1907.03363] など

1. 導入

量子重力を調べたいけど高次元だとむずかしい...

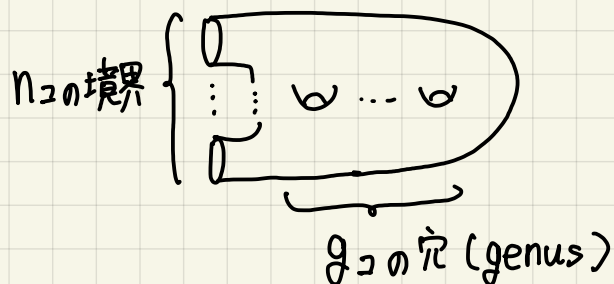
⇒ 2次元でまず考えよう.

2次元重力の特殊性

- ・ 伝搬する自由度なし
- ・ Einstein eq. が自明: 必ず $R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 0$

- ・ Einstein-Hilbert 作用は topological :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma_{g,n}} d^2x \sqrt{\det g} R + \int_{\partial \Sigma_{g,n}} dx \sqrt{\det h} K \right] = \underbrace{2 - 2g - n}_{\text{境界上の計量}} \quad \chi(\Sigma_{g,n}) : \text{Euler数.}$$



Einstein-Hilbert作用だけでは簡単すぎなので scalar $\Phi \in \text{couple}$ を増やす.

$$I[g, \Phi] = - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \left[\underbrace{U_1(\Phi) R}_{\substack{\downarrow \text{再定義} \\ \Phi}} + U_2(\Phi) (\partial \Phi)^2 + U_3(\Phi) \right] + (\text{boundary term})$$

↑
変分が well-defined になるようにする

$$\hookrightarrow -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \left[\Phi R + U_1(\Phi) (\partial\Phi)^2 + U_3(\Phi) \right] + \dots$$

Weyl 変換 をすると, R の変換分と運動項が相殺.

$$g_{ab} \rightarrow e^{2\omega} g_{ab}, \quad \omega = \frac{1}{2} \int U_1(s) ds \Big|_{S=\Phi}$$

③ "Weyl anomaly" はムリ.

一般性を失わず以下のようにできる

$$I[g, \Phi] = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \left[\Phi R + V(\Phi) \right] + \dots$$

Φ は **dilaton** と呼ぶ

特に $V(\Phi) = 2\Phi$ と linear な potential を持つものを **Jackiw-Teitelboim 重力** と呼ぶ.

JT 重力の特徴.

- 幾何学が必ず双曲的: $R = -2$. $\rightarrow$ 対称性が高い & 双曲幾何の定理を活用できる.
- 1-loop exact
- 分配関数が計算可能 $\rightarrow$ 半古典的に色々調べられる!
- 非自明なトポロジー (wormhole などある場合) の時空でもいじることができる.
- ランダム行列との対応がある (**Saad-Shenker-Stanford duality**)
 $\rightarrow$ ブラックホールのカオス性, 重力の非摂動効果まで
- 高次元ブラックホール (の一部の情報) を記述できる.

4次元ブラックホールとの関係

$$4D \text{ Euclidean Einstein-Maxwell. } I = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{\det g} R_{(4)} + \frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{\det g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots$$

$$\downarrow \quad ds^2 = \frac{\Phi(x)}{r_0^2} \left(g_{ab} dx^a dx^b + r_0^2 d\Omega^2 \right), \quad A_\mu dx^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} a_a(x) dx^a, \quad \mathcal{M} = \Sigma \times S^2.$$

$$I = -\frac{1}{4G_N} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \left[\Phi \left(R_{(2)} + \frac{2}{r_0^2} \right) + \frac{3}{2\Phi} (\partial\Phi)^2 \right] + \frac{r_0^2}{4e^2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} f_{ab} f^{ab} + \dots$$

($f_{ab} = \partial_a a_b - \partial_b a_a$)

$$\downarrow \quad \text{Weyl transformation } g_{ab} \rightarrow \frac{\Phi^{\frac{2}{3}}}{r_0^2} g_{ab}, \quad \text{電磁場は Reissner-Nordstrom 解 } A_\mu dx^\mu = i \frac{e^2}{4\pi} \frac{Q}{r} dt \text{ を代入}$$

$$I = -\frac{1}{4G_N} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \left[\Phi R_{(2)} + V(\Phi) \right] + \dots$$

$$V(\Phi) = 2r_0 \left[\Phi^{-\frac{1}{2}} - \frac{G_N e^2}{4\pi} Q^2 \Phi^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$ds^2 = \frac{\Phi(r)}{r_0^2} \left(g_{ab} dx^a dx^b + r_0^2 d\Omega^2 \right) = \frac{\Phi}{r_0^2} g_{ab} dx^a dx^b + \Phi d\Omega^2$$

古典的には $\Phi \sim r^2$

Background として Reissner-Nordstrom BH を考える。

$$\Phi \sim r_H^2 + \phi$$

$\uparrow$ horizon radius. $\uparrow$ 近距離

→ horizon 周りだけに注目

→ $V(\Phi) \sim V_0 + 2\lambda\phi$ とポテンシャルを近似。

(事実) 低温極限 (near extremal lim) では $V_0 \sim 0$ 。

∴ Near extremal BH の near horizon を記述する 2次元有効作用は JT 重力。

$$I = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi r_H^2}{G_H} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} R + \dots \right] - \frac{1}{4G_H} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \phi (R_{(2)} + 2\lambda) + \dots$$

• 4D near-ext. Reissner-Nordstrom BH の near horizon geometry は

$AdS_2 \times S^2$ であることが consistent.

• 本当は Weyl anomaly, massive KK mode, higher curvature などと議論が必要がある。

• 有限温度だと 1次近似はつかない。→ dilaton potential をちゃんと考える必要がある。

2. 古典論

$$I_{JT} = - \frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} R + \int_{\partial \Sigma} \sqrt{\det h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \Phi (R+2) + \int_{\partial \Sigma} dx \sqrt{\det h} \Phi (K-1) \right]$$

" $S_0 \chi(\Sigma)$

変分を well-defined にするために必要

bulk の UV 発散を相殺する項

境界条件: Dirichlet $\delta \Phi|_{\partial \Sigma} = 0, \delta g|_{\partial \Sigma} = 0$.

2.1 古典解

運動方程式: ① Φ の変分 $\rightarrow R+2=0$

★ 時空は負の定曲率を持つ空間 (Anti-de Sitter 空間 / 双曲空間)

② g_{ab} の変分 $\rightarrow (\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \nabla^2 + g_{ab}) \Phi = 0$

$a=1,2$.

★ $\xi^a := \epsilon^{ab} \partial_b \Phi$ は Killing vector.

($\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 1$)

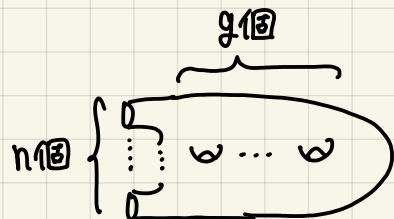
(EOM $\Rightarrow \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$)

$\rightarrow$ 非自明な dilaton 解 $\Phi \neq 0$ を持つ古典解は、必ず連続的な isometry を持つ?

($\Phi = \text{const.} \neq 0$ は EOM の解にはならない)

(事実) $(g,n) \neq (0,1), (0,2)$ の場合, isometry は有限群

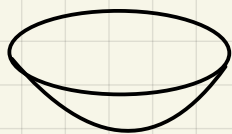
$\rightarrow$ nonzero の global な Killing vector は存在しない。



★ 非自明な dilaton 解 ($\Phi \neq 0$) は $(g,n) = (0,1), (0,2)$ のみ!!

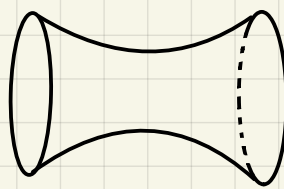
$(g,n) = (0,1)$

disk.



$(g,n) = (0,2)$

cylinder.



解の具体的な形 複素座標 $z, \bar{z}$ を使うと...

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{z'(z) \bar{z}'(\bar{z})}{|\text{Im } z(z)|^2} dz d\bar{z} = \frac{dz d\bar{z}}{|\text{Im } z|^2} \\ \Phi &= \frac{C_1 + C_2 \text{Re } z - \mu z \bar{z}}{\text{Im } z} \end{aligned} \right.$$

z : 任意正則関数.

2.2 対称性

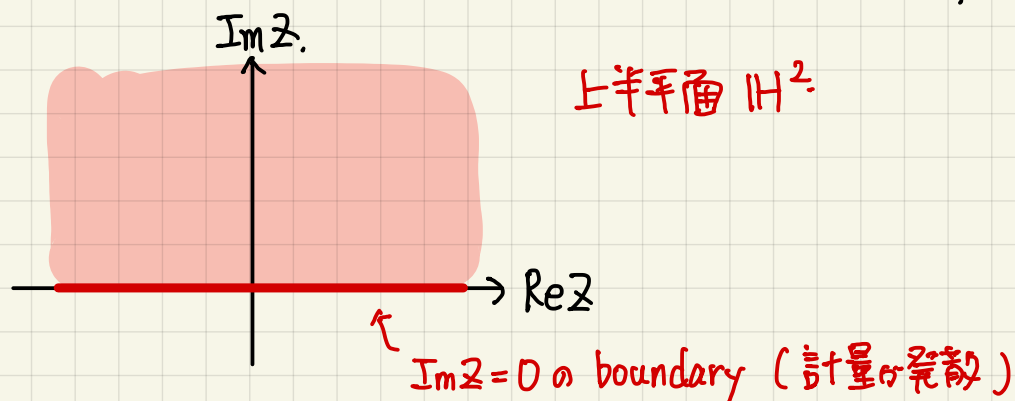
双曲面の持つ対称性

$$\text{計量 } ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{|\text{Im} z|^2} \text{ は } z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1, a,b,c,d \in \mathbb{R})$$

の $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}$ で不変.

$\therefore \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{SO}(1, 2)$ 対称性がありそう

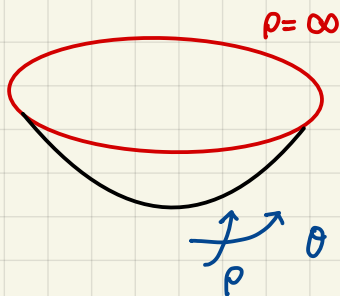
(注) この計量は局所的な表示なので, この対称性が isometry とはなぞらない.



① Disk型の場合.

$z(z)$ をうまくとると, 次の大域的な表示がある

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\theta^2 \quad (0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \theta \sim \theta + 2\pi)$$



Killing eq. の一般解は.

$$\xi = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 \quad (A_1, A_2, A_3 = \text{const.})$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \cos \theta \, \partial_\rho - \coth \rho \sin \theta \, \partial_\theta \\ \xi_2 = -\sin \theta \, \partial_\rho - \coth \rho \cos \theta \, \partial_\theta \\ \xi_3 = \partial_\theta \end{cases}$$

$\hookrightarrow \text{SO}(1, 2)$ の交換関係をみたす.

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk} \xi_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

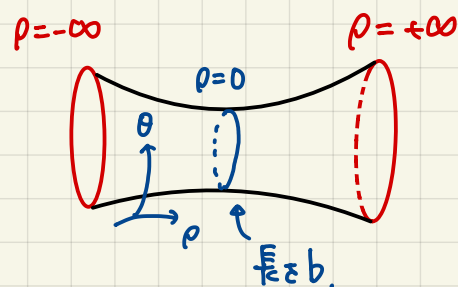
★ isometry は $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{SO}(1, 2)$.

$$\xi_1|_{\partial\mathbb{D}} = -\sin \theta \, \partial_\theta, \quad \xi_2|_{\partial\mathbb{D}} = -\cos \theta \, \partial_\theta, \quad \xi_3|_{\partial\mathbb{D}} = \partial_\theta \quad \in \text{SO}(1, 2) \text{ の交換関係をみたす}$$

$\Rightarrow$ boundary に $\in \text{SO}(1, 2)$ sym. が与えられる.

② cylinder 型の場合

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (-\infty < \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta < b, \quad \theta \sim \theta + b)$$



Killing eq. の一般解は

$$\xi = A \cosh^2 \rho \partial_\theta$$

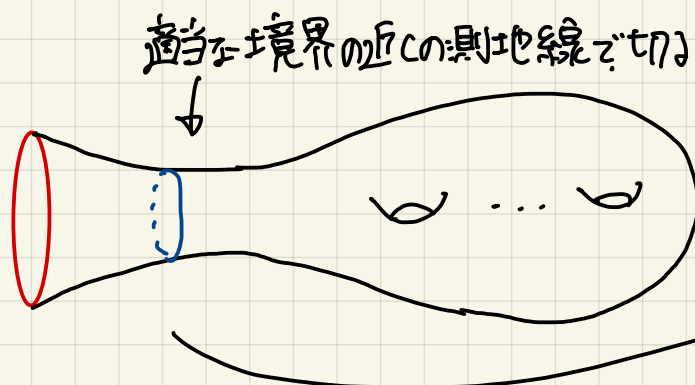
↓

θ方向の並進

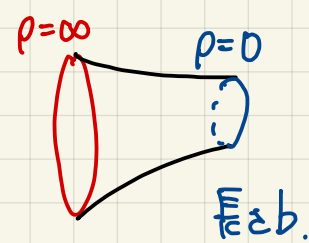
✳ isometry は $U(1)$

$\xi|_{\partial\mathbb{H}} \propto \partial_\theta$ なので boundary 上にも $U(1)$ sym. がある

③ その他



$$ds^2 = d\rho^2 + \cos^2 \rho d\theta^2 \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta < b, \quad \theta \sim \theta + b$$



⇒ boundary 上にも $U(1)$ sym. がある

Isometry のまとめ

	bulk	boundary
Disk	$PSL(2, \mathbb{R})$	$PSL(2, \mathbb{R})$
cylinder	$U(1)$	$U(1)$
その他	有限群	$U(1)$

Dilaton と対称性

$$\Phi = \frac{C_1 + C_2 \operatorname{Re} Z - \mu Z \bar{Z}}{\operatorname{Im} Z}$$

$$\rightarrow Z \mapsto \frac{aZ + b}{cZ + d} \text{ で不変ではない}$$

→ dilaton があることで $PSL(2, \mathbb{R})$ sym. は破れる

3. 分配関数

$$Z = \int [dg][d\Phi] e^{-I_T} \text{ を計算する.}$$

* $[dg]$ の定義は後でちゃんとするので今はうたに metric (とキカ) の足し上げと思え

Step 0. 準備

★ 境界条件

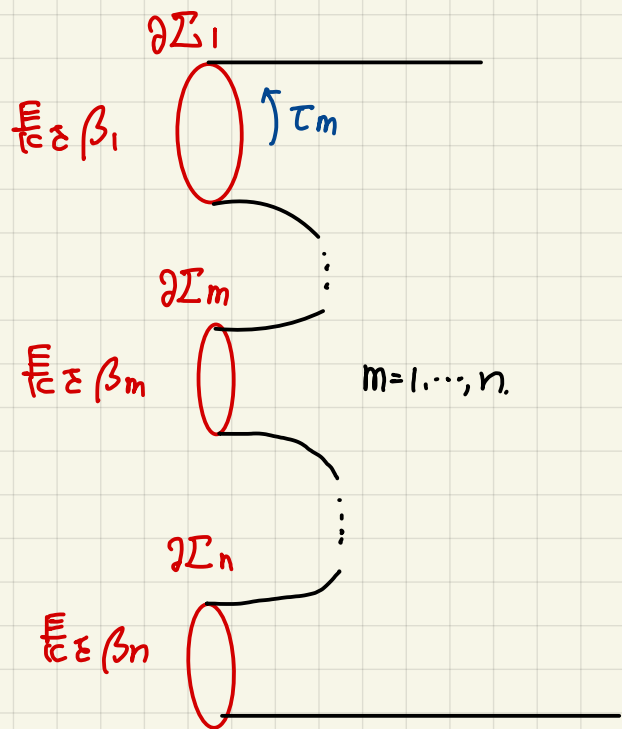
① 境界の数は n で固定 (穴の数 g は固定しない)

$$\textcircled{2} \quad g|_{\partial\mathcal{Z}_m} = \frac{d\tau_m^2}{\epsilon^2} \quad \Phi|_{\partial\mathcal{Z}_m} = \frac{\gamma}{\epsilon}$$

$\partial\mathcal{Z}_m$: m 番目の境界 (あとで $\epsilon \rightarrow 0$.)

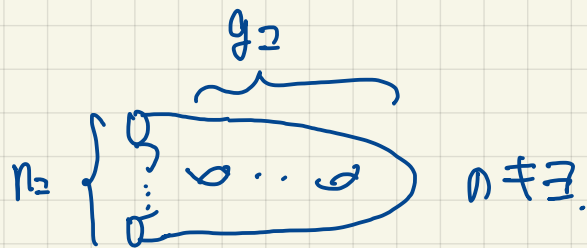
$$\textcircled{3} \quad \tau_m \sim \tau_m + \beta_m.$$

$$\left(\textcircled{\text{注}} \quad \Phi = \frac{\gamma_m(\tau_m)}{\epsilon} \text{ といっても, } \gamma_m(\tau_m) d\tau_m \rightarrow \gamma d\tau_m \text{ とおきなおせばいい.} \right)$$



★ 各 topology ごとに分解

$$Z(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_g e^{S_0 \chi} Z_{g,n}$$



$$\textcircled{\chi} = 2 - 2g - n$$

$\textcircled{\text{注}}$ on-shell だと higher genus は $e^{S_0 \chi}$ で suppress される!!

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \int [dg][d\Phi] \exp \left[+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{g,n}} d^2x \sqrt{\det g} \Phi(R+2) + \int_{\partial\Sigma_{g,n}} dx \sqrt{\det h} \Phi(K-1) \right]$$

Step 1. Dilaton の積分

$$\begin{aligned} Z_{g,n} &:= \int [dg][d\Phi] \exp \left[+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{g,n}} d^2x \sqrt{\det g} \Phi(R+2) + \int_{\partial\Sigma_{g,n}} dx \sqrt{\det h} \Phi(K-1) \right] \\ &= \int [dg] \delta(R+2) e^{-I_{\text{bdry}}} \end{aligned}$$

★ bulk の幾何は 双曲幾何に限られ

★ bulk の自由度はほぼなし. topological 5 次元だけ

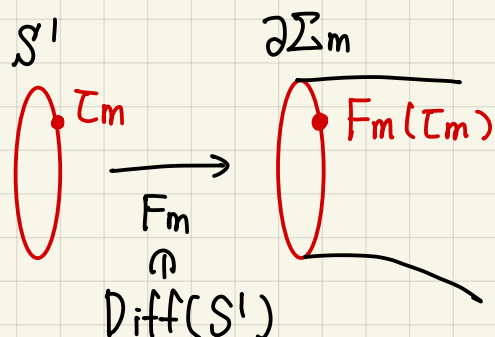
bulk の幾何が決まったことで, 境界の座標変換の対称性が自発的に破れる。

$$\text{Diff}(S^1) \rightarrow \begin{cases} \text{PSL}(2, \mathbb{R}) & \text{disk} \\ U(1) & \text{disk 以外.} \end{cases}$$

★ boundary には pseudo NG mode. がある。 (boundary mode. boundary graviton?)

Step. 2. 自由度の分離

- boundary の埋めこみ $F_m: \Sigma_m \mapsto (p, \tau)$ (boundary の座標と bulk の座標の変換)



$$[dg] = [dg_{\text{bulk}}] [dF_m]$$

$$\star \quad ds^2|_{\partial\Sigma_m} = \frac{d\tau_m^2}{\epsilon^2} \text{ の } \tau \text{ として } \quad g_{ab}|_{\partial\Sigma} = \frac{dF_m^a}{d\tau_m} \frac{dF_m^b}{d\tau_m} \cdot \frac{1}{\epsilon^2}$$

$\hookrightarrow F_m$ は boundary の metric の自由度 ($\sim$ boundary graviton)

(F_m は (F_m^0, F_m^1) の 2 自由度 があるが Dirichlet 境界条件で 1 自由度に落ちる)

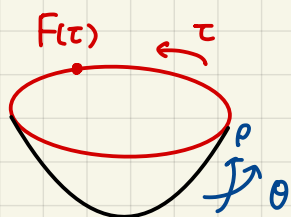
今 boundary にも $PSL(2; \mathbb{R})$ or $U(1)$ の symmetry があるから

$$F_m \in \begin{cases} \text{Diff}(S^1) / PSL(2, \mathbb{R}) \\ \text{Diff}(S^1) / U(1) \end{cases}$$

$$\int [dg] := \int [dg_{\text{bulk}}] \prod_{m=1}^n \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} [dF_m]$$

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \int [dg_{\text{bulk}}] \delta(R+2) \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)}^{\text{or } \text{Diff}(S^1)/PSL(2, \mathbb{R})} [dF_m] \exp \left[\int_0^{\beta_m} \frac{d\tau_m}{\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon} K[g_{\text{bulk}}, F_m] \right]$$

もう少し計算を始める。



1. Disk 型 $(g, h) = (0, 1)$

$$Z_{0,1}(\beta) = \int [dg_{\text{bulk}}] \delta(R+2) \int_{\text{Diff}(S^1)/PSL(2, \mathbb{R})} [dF] \exp \left[\int_0^\beta \frac{d\tau}{\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon} (K[g_{\text{bulk}}, F] - 1) \right]$$

- g_{bulk} は $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2$ だけ

- 以下 $F(\tau) = (\rho(\tau), \theta(\tau))$ と書く。 ($\oplus$) $\theta(\tau + \beta) = \theta(\tau) + 2\pi$)

Dirichlet 境界条件を使うと、 θ を決めれば ρ も決まる。

$$\Rightarrow [dF] = [d\theta] \text{ と単に書く}$$

- 外部曲率を頑張って計算すると

$$K = 1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (1 \text{ は } \tau \text{ 微分})$$

よって

$$\int_0^\beta \frac{d\tau}{\epsilon} \frac{\gamma}{\epsilon} (K[g_{\text{bulk}}, F] - 1) = \gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$\downarrow \text{Sch} \{F, \tau\} := \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \quad \text{Schwarz 微分}$$

$$= \gamma \int_0^\beta d\tau \cdot \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} =: I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\textcircled{\text{注}} \text{Sch} \{F, \tau\} = \text{Sch} \left\{ \frac{aF+b}{cF+d}, \tau \right\} \text{ の } \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ 不変.}$$

$$(ad-bc=1)$$

★ Disk 型の分配関数は Schwarz 理論の分配関数.

$$Z_{0,1}(\beta) = \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})} [d\theta] e^{-I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta}{2}]}$$

2. Cylinder 型 $(g,n)=(0,2)$

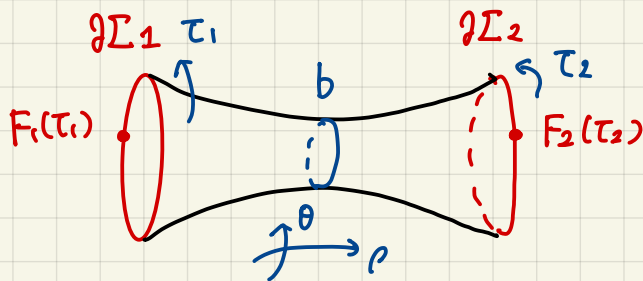
$$Z_{0,1}(\beta) = \int [dg_{\text{bulk}}] S(R+2) \prod_{m=1}^2 \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} [dF_m] \exp \left[\int_0^\beta \frac{d\tau_m}{\epsilon} \gamma \left(K[g_{\text{bulk}}, F_m] - 1 \right) \right]$$

$$\bullet g_{\text{bulk}} \text{ は } ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2$$

$$\Downarrow \quad \theta \sim \theta + b$$

b は 105Xトリス される.

$$g_{\text{bulk}}(b) \text{ と書く.}$$



$$\bullet \text{以下 } F_m(\tau) = (\rho_m(\tau), \theta_m(\tau)) \text{ と書く.} \quad \left(\textcircled{\text{注}} \quad \theta_m(\tau+\beta) = \theta_m(\tau) + \underline{b} \right)$$

Dirichlet 境界条件を使うと, θ を決めれば ρ も決まる.

$$\Rightarrow [dF_m] = [d\theta] \text{ と単に書く.}$$

• 外部曲率を頑張って計算すると.

$$K = 1 + \epsilon^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + O(\epsilon^3) \quad (1 \text{ は } \tau \text{ 微分})$$

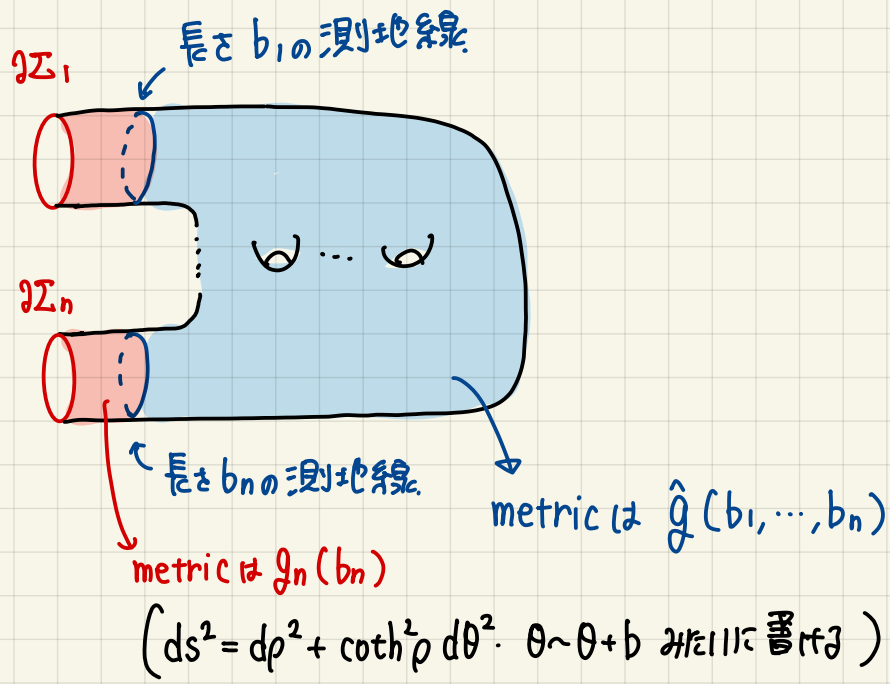
$$\text{よって} \quad \int_0^\beta \frac{d\tau}{\epsilon} \gamma \left(K[g_{\text{bulk}}, F] - 1 \right) = \gamma \int_0^\beta d\tau \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta'^2 - \frac{\theta'''}{\theta'} \right] + O(\epsilon)$$

$$= \gamma \int_0^\beta d\tau \cdot \text{Sch} \left\{ \tanh \frac{\theta}{2}, \tau \right\} =: I_{\text{Sch}} \left[\tanh \frac{\theta}{2} \right]$$

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) = \int_{b \in (0, \infty)} [dg_{\text{bulk}}(b)] \quad Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_1, b) Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_2, b)$$

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) := \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} [d\theta] e^{-I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta}{2}]}$$

3. その他



$\int [dg_{\text{bulk}}] \rightarrow \int [dg(b_1)] \cdots [dg(b_n)] [d\hat{g}(b_1, \dots, b_n)]$ に分解.

$$Z_{g,n} = \prod_{m=1}^n \int [dg_m(b_m)] \underbrace{\int_{\text{Diff}(S)/\text{U}(1)} [dF_m] e^{\frac{\gamma}{2} \int d\tau_m (K-1)}}_{\text{cylinder と同じ計算}} \int [d\hat{g}(b_1, \dots, b_n)]$$

$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_m, b_m)$

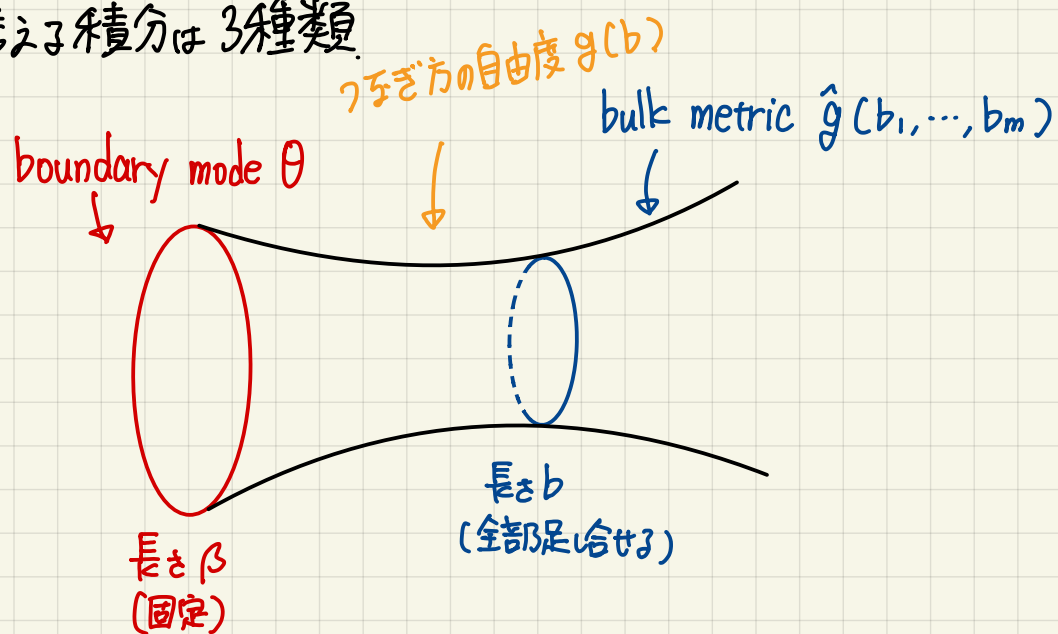
$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_{m=1}^n \int_{b_m \in [0, \infty)} [dg(b_m)] Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_m, b_m) \cdot V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$$

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) := \int [d\hat{g}(b_1, \dots, b_n)]$$

★ JT重力 $\rightarrow$ Schwarz 理論 & 計量の空間の体積.

Step 4. 積分測度の定義

考えの積分は 3 種類

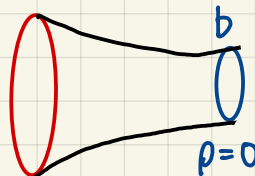


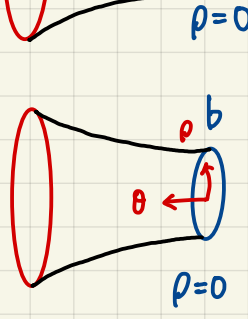
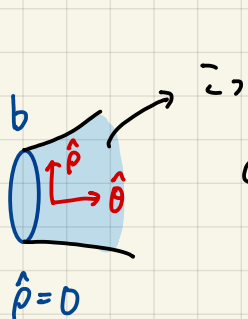
積分範囲

• boundary mode $\theta \in \begin{cases} \text{Diff}(S^1) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \\ \text{Diff}(S^1) / U(1) \end{cases}$

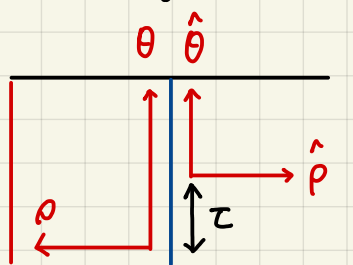
• つなぎ方の自由度 $g(b) = \{ \text{trumpet 型 } \text{trumpet} \text{ 上に定義される双曲計量} \} / \text{Diff.}$

実はもう1つのパラメータがある。

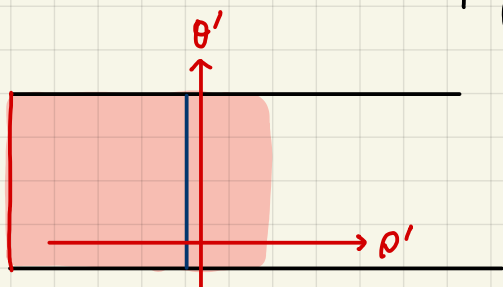
 $\rightarrow ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\theta^2$ ($\theta \sim \theta + b$) と一意に計量が決まる。

  $\rightarrow$ こっちにも b の近傍で $ds^2 = d\hat{\rho}^2 + \cosh^2 \hat{\rho} d\hat{\theta}^2$ ととれる。

つなげるときに“ずれ”の自由度がある



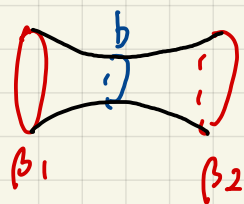
$$\rho' = \begin{cases} -\rho & \rho' < 0 \\ \hat{\rho} & \rho' > 0 \end{cases} \quad \theta' = \begin{cases} \theta & \rho' < 0 \\ \hat{\theta} + \tau & \rho' > 0 \end{cases}$$



$$ds^2 = d\rho'^2 + \cosh^2 \rho' [d\theta' + \tau \delta(\rho') d\rho']^2$$

• bulk metric $\hat{g}(b_1, \dots, b_n) = \{ \text{trumpet 型 } \text{trumpet} \text{ 上に定義される双曲計量} \} / \text{Diff.}$

5次元 $(g, n) = (0, 2)$



上の計量 $g_{\text{bulk}}(b)$ も一般に2つのパラメータで与えられる

$$ds^2 = d\rho + \cosh^2 \rho [d\theta + \tau \delta(\rho) d\rho]^2$$

1st order formalism による積分測度の導出

- $\{e_a\}_{a=1,2}$: 多様体場 (各点 $p \in \Sigma$ で e_a は $T_p \Sigma$ の基底)
- $\{\theta^a\}_{a=1,2}$: e_a の dual frame
- $\nabla_a e_b =: \gamma_{ab}^c e_c$ γ_{ab}^c : 接続係数 $\rightarrow \omega^a_b := \gamma^a_{cb} \theta^c$. 接続形式

$\hookrightarrow a, b$ について反対称

$\Rightarrow$ 1-形式 $\omega^a_b = e^a_b \omega$ と書ける.

$$R^a_b := \frac{1}{2} R_{cd}^a \theta^c \wedge \theta^d : \text{曲率形式}$$

$$\tau^a := \frac{1}{2} T^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c : \text{振率形式}$$

$$I_{JT} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\det g} \Phi (R+2) - \int_{\partial \Sigma} dx \sqrt{\det h} \Phi (K-1)$$



$$I_{BF} = -\bar{z} \int_{\Sigma} \text{Tr}[BF] + \frac{\bar{z}}{2} \int_{\partial \Sigma} \text{Tr}[BA]$$

A : $SL(2, \mathbb{R})$ 1-form ゲージ場

B : 0-form

振率 0 の拘束条件を 2 つの Lagrange 未定乗数.

$$B := -\bar{z} \begin{pmatrix} -\Phi_1 & \Phi_2 + \Phi \\ \Phi_2 - \Phi & \Phi_1 \end{pmatrix} = \bar{z} \Phi_1 \sigma_3 - \bar{z} \Phi_2 \sigma_1 + \Phi \sigma_2$$

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^1 & e^2 \omega \\ e^2 + \omega & e^1 \end{pmatrix} = -e^1 \sigma_3 + e^2 \sigma_1 - \bar{z} \omega \sigma_2 \quad \leftarrow \text{metric の自由度を担, 2 つ}$$

$$F := dA + A \wedge A = \frac{1}{2} [-(de^1 + \omega \wedge e^2) \sigma_3 + (de^2 - \omega \wedge e^1) \sigma_2 - \bar{z} (d\omega + e^1 \wedge e^2) \sigma_1]$$

- A の ゲージ変換 $\leftrightarrow \Sigma$ 上の微分同相写像 & 局所 Lorentz 変換.

$$\int [dB] e^{iS_{BF}} = \mathcal{S}(F) \rightarrow \text{flat connection } F=0.$$

(本当は JT と $PSL(2, \mathbb{R})$ BF の対応には微妙な点がある Ref. Turiaci '25. など)

Symplectic 形式を定義すれば体積形式も決まる $\rightarrow$ 積分測度が定義できる.

$$\text{Volume form} = \frac{1}{\dim!} (\text{symp. form})^{\dim/2}.$$

$$\text{ゲージ場 } A \text{ の空間の Symplectic 形式 } \Omega(\delta_1 A, \delta_2 A) := 2 \int \text{Tr}[\delta_1 A \wedge \delta_2 A]$$

$$\text{bulk に注目 } ds^2 = d\rho'^2 + \cosh^2 \rho' [d\theta' + \tau \delta(\rho') d\rho']^2$$

ここから A を決めて Ω に代入

$$\Omega = \frac{1}{2} [\delta_1 b \delta_2 \tau - \delta_2 b \delta_1 \tau] \Rightarrow \text{Weil-Petersson 形式 と呼ばれる.}$$

$$\therefore \int [dg(b)] := \int_0^\infty db \int_0^b d\tau \quad (g, n) = (0, 2) \text{ の bulk 積分も同様.}$$

★ あとで見るとように一般の (g, n) に対しても同様に定義できる.

boundary に注目

$$\gamma \in \gamma \in \dots \quad \theta \in \begin{cases} \text{Diff}(S^1) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \\ \text{Diff}(S^1) / U(1) \end{cases}$$

↑
boundary 上の diffeo

||
boundary 上の gauge 変換

$$\delta A = d\theta + [A, \theta] \text{ など}$$

$$\Omega[\delta_1 A, \delta_2 A] = 2 \int_{\partial \Sigma} \text{Tr}[\theta_1 \delta_2 A] - 2 \int_{\Sigma} \text{Tr}[\theta_1 \wedge (d\delta_2 A + A \wedge \delta_2 A + \delta_2 A \wedge A)]$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \delta_2 F \\ \parallel \\ 0 \end{matrix} \quad \left\{ \text{flat connection のみ} \right\}$$

$$\therefore \Omega[\delta_1 A, \delta_2 A] = 2 \int_{\partial \Sigma} \text{Tr}[\theta, \delta_2 A]$$

ここで, background の flat connection $\rightarrow$ pure gauge に取れる $A = g^{-1} dg$ (かつ $\theta = g^{-1} \delta g$
($g: S^1(2, \mathbb{R})$ -valued.))

$$\therefore \Omega = 2 \int_0^\beta d\tau \text{Tr}[g^{-1} \delta g \wedge \partial_\tau (g^{-1} \delta g)] \quad \delta: g \text{ 全体の空間の外微分}$$

Disk 型

$$ds^2 = dp^2 + \sinh^2 p d\theta^2 \text{ など}$$

$$g = \begin{pmatrix} e^{-\frac{p}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & e^{\frac{p}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-\frac{p}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{\frac{p}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Omega = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\delta \theta' \wedge \delta \theta''}{(\theta')^2} - \delta \theta \wedge \delta \theta' \right]$$

$$\left(\delta: \text{Diff}(S^1) / \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \text{ 上の外微分. } \quad \tau = \frac{d}{d\tau} \right)$$

Trumpet 型

$$ds^2 = dp^2 + \cosh^2 p d\theta^2 \text{ など}$$

$$g = \begin{pmatrix} e^{-\frac{p}{2}} \cosh \frac{\theta}{2} & e^{\frac{p}{2}} \sinh \frac{\theta}{2} \\ e^{-\frac{p}{2}} \sinh \frac{\theta}{2} & e^{\frac{p}{2}} \cosh \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Omega = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{\delta \theta' \wedge \delta \theta''}{(\theta')^2} + \delta \theta \wedge \delta \theta' \right]$$

Kirillov-Kostant-Souriau 形式 と呼ばれる。

補足

- ・ JT と $SL(2, \mathbb{R})$ BF の対応には微妙な点あり
たとえば BF 側には重力と解釈できる configuration がある。 4.7

- ・ BF を介えずに, 2nd order formalism だけで議論もできる

Lin-Ustyuk '23 , Moitra-Sake-Trivedi '21 など

$$\| \delta g \|^2 = \int \delta g_{ab} \delta g^{ab} dx.$$

4. Moduli空間上の積分

参考文献 Mirzakhani '05. Stanford-Witten '23 など

$$\hat{\Sigma}_{g,n}(b_1, \dots, b_n) := \text{diagram of a genus } g \text{ surface with } n \text{ boundary components } b_1, \dots, b_n$$

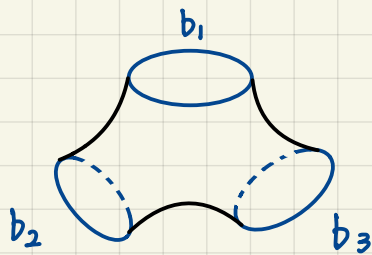
$$\mathcal{G}_{g,n} := \{ \hat{\Sigma}_{g,n} \text{ 上の双曲計量 } \hat{g}_{ab} \}$$

$$\text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \{ \hat{\Sigma}_{g,n} \text{ 上の微分同相写像 } \} \quad (\text{境界上で恒等写像のもののみ考える})$$

$$\mathcal{M}_{g,n} := \mathcal{G}_{g,n} / \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n}) : \text{moduli 空間} \quad (* \text{ 本当はコンパクト化が必要あり})$$

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) := \int_{\mathcal{M}_{g,n}} [d\hat{g}] \leftarrow \text{これをどう計算するか?}$$

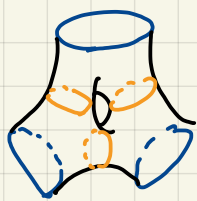
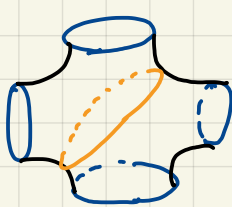
(事実) $\mu_{0,3}$ の元は 17. $\rightarrow V_{0,3}(b_1, b_2, b_3) = 1$ とする.



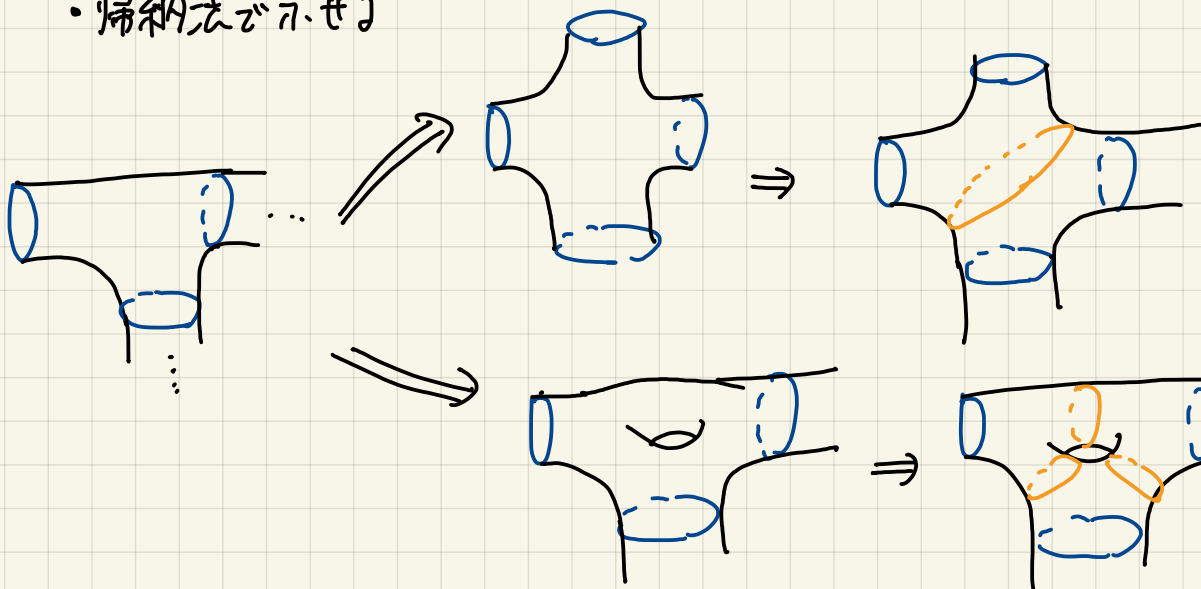
110-711 分解

$$\hat{\Sigma}_{g,n} \text{ を } 3g+n-3 \text{ 本の測地線で } 2g+n-2 \text{ のパーツに分解可能}$$

例



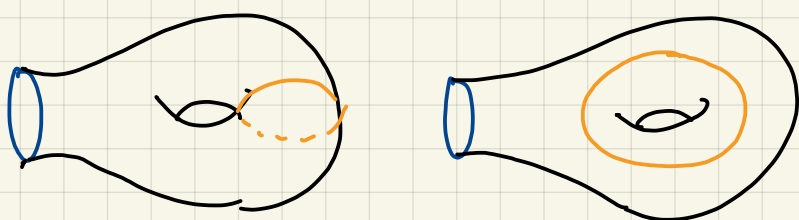
- ・帰納法で示せる



10フツが1ユ, 測地線が1本ふえる

パンツが2コ, 測地線が3本ある。

(注) パンツ分解の方法は一意ではない。



Teichmüller 空間

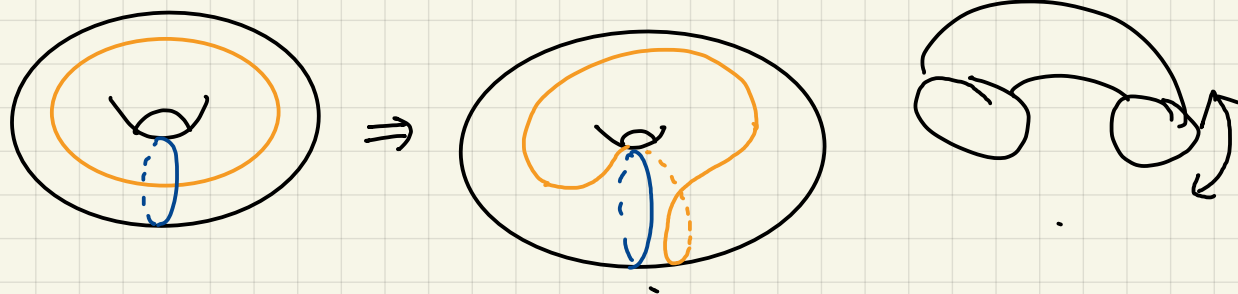
$\text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \{ \hat{\Sigma}_{g,n} \text{ 上の微分同相写像であって小恒等写像と isotopic なもの} \}$

$\mathcal{T}_{g,n} := \mathcal{G}_{g,n} / \text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n}) : \text{Teichmüller 空間.}$ ↳ small gauge transformation みたいなもの.

※ 連続変型でうつりかわるもののみを同一視

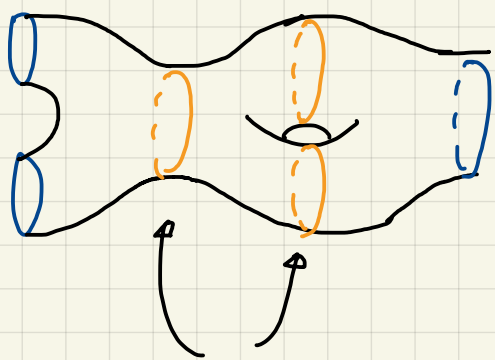
$\text{MCG}(\hat{\Sigma}_{g,n}) := \text{Diff}(\hat{\Sigma}_{g,n}) / \text{Diff}_0(\hat{\Sigma}_{g,n}) : \text{写像類群 (Mapping Class Group), Modular 群}$

例 Dehn twist



$$\therefore \mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n} / \text{MCG}.$$

10ツツ分解を一つずつして、10ツツに分解 $\rightarrow$ 各10ツツには一意に計量が定まる.



各測地線で計量をつなげるときに、振りの自由度がある

$\Rightarrow$ 各測地線の長さ $b_1, \dots, b_{3g+n-3}$ と、振れ $\tau_1, \dots, \tau_{3g+n-3}$ の $6g+2n-6$ のパラメーターで計量が決まる.

$$\text{(事実)} \quad \Phi: \mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}_+^{3g+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+n-3} \quad \text{は全単射}$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \psi$$

$$(b_1, \dots, b_{3g+n-3}, \tau_1, \dots, \tau_{3g+n-3})$$

Fenchel-Nielsen 座標.

• $\mathcal{T}_{g,n}$ 上には MCG で不変な symplectic 形式が定義できて、これを **Weil-Petersson 形式** と呼ぶ

ω_{WP}

↳ ここから体積形式が $\frac{1}{(3g+n-3)!} \omega_{\text{WP}}^{3g+n-3}$ で定義できて $\Rightarrow V_{g,n}$ を **Weil-Petersson 体積** と呼ぶ.

(Thm: Wolpert)

$$\omega_{\text{WP}} = \sum_{i=1}^{3g+n-3} db_i \wedge d\tau_i$$

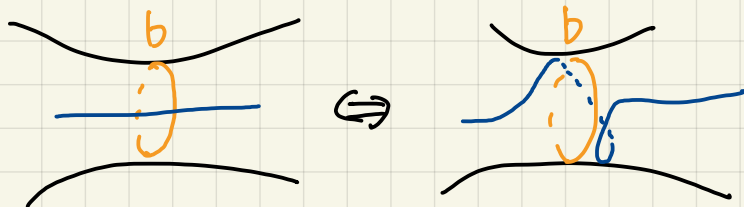
↳ $[d\hat{g}] = \prod_{z=1}^{3g+n-3} db_z d\tau_z$ とすればいい? JTの分配関数の議論とも整合する.

$$\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n} / \text{MCG.}$$

↑
これをどうするか?

• MCGは dehn twist で生成される.

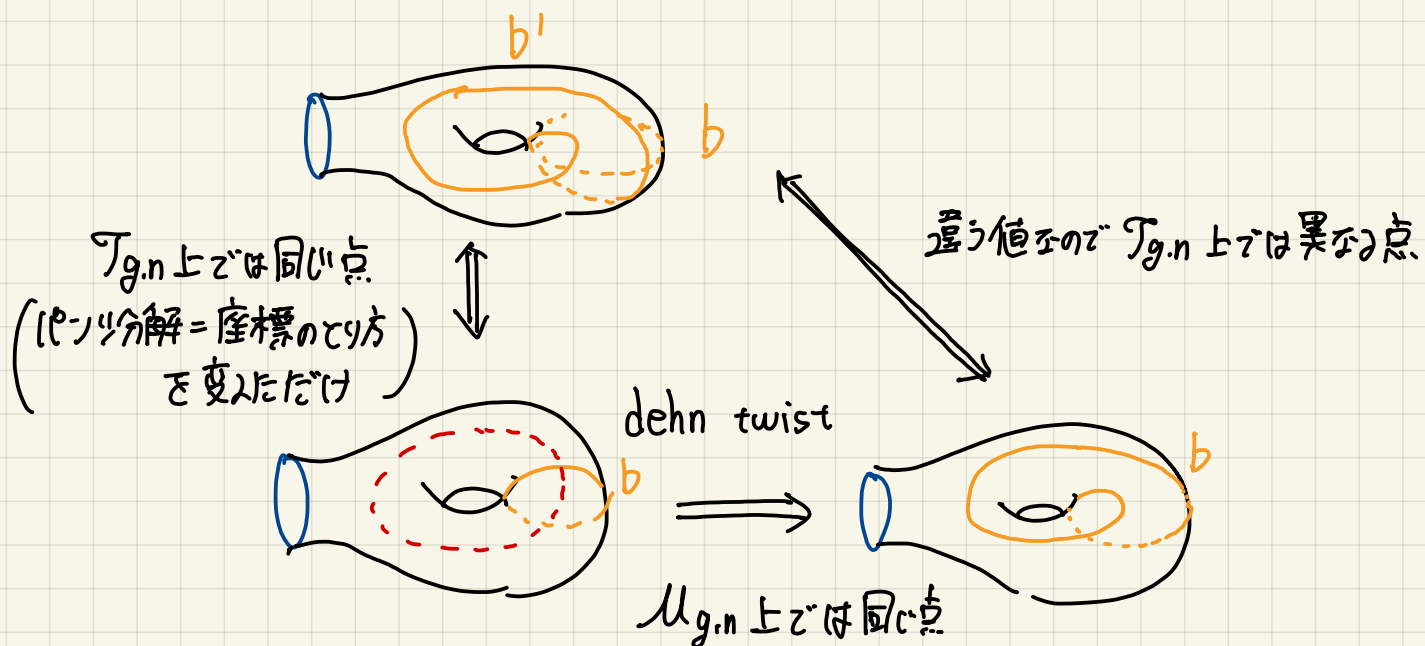
• パンツ分解を使った測地線に沿った dehn twist を考えると...



⇒ 1 周分の twist は同一視されるので $\tau + b \sim \tau$.

$$\Rightarrow \int \mathcal{M}_{g,n} [dg] \stackrel{?}{=} \prod_{z=1}^{3g+n-3} \int_0^\infty db_z \int_0^{b_z} d\tau_z$$

• しかしパンツ分解の測地線とちがう曲線に沿った dehn twist を考えると...



★ MCGの作用はもっと複雑 ⇒ 一般に MCGの基本領域はわからない。

Mirzakhani 漸化式

(Thm) $B = (b_2, \dots, b_n)$

$$b_1, V_{g,n}(b_1, B) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \underbrace{D(b_1, b'_1, b'_2)}$$

$$\times \left[V_{g-1, n+1}(b'_1, b'_2, B) + \sum'_{\substack{h_1+h_2=g \\ B_1 \cup B_2=B}} V_{h_1, 1+|B_1|}(b'_1, B_1) V_{h_2, 1+|B_2|}(b'_2, B_2) \right]$$

$$+ \sum_{k=2}^n \int_0^\infty b'_1 db'_1 \underbrace{[b_1 - T(b_1, b'_1, b_k)]}_{\text{red wavy line}} V_{g, n-1}(b'_1, B \setminus \{b_k\})$$

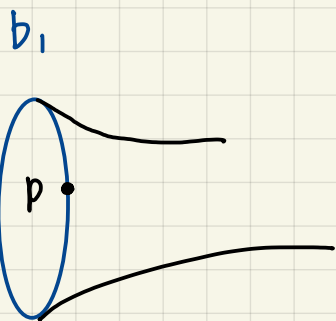
$$T(b_1, b_2, b_3) := \log \left[\frac{\cosh(b_3/2) + \cosh((b_1+b_2)/2)}{\cosh(b_1/2) + \cosh(b_1-b_2/2)} \right], \quad D_3(b_1, b_2, b_3) = b_1 - T(b_1, b_2, b_3) - T(b_1, b_3, b_2)$$

1x-3

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \text{---} g \text{---} \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right] B \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \left[\begin{array}{c} b_1 \quad b'_1 \quad g-1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b_2 \quad b'_2 \quad b_n \end{array} \right] B + \sum_{\substack{h_1+h_2=g \\ B_1 \cup B_2=B}} \left[\begin{array}{c} b_1 \quad b'_1 \quad h_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b_2 \quad b'_2 \quad b_n \end{array} \right] B_1 \\
 & \quad + \sum_{k=2}^n \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[\begin{array}{c} b_1 \quad b'_1 \quad g \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b_k \quad b_2 \quad b_n \end{array} \right] B/\{b_k\}
 \end{aligned}$$

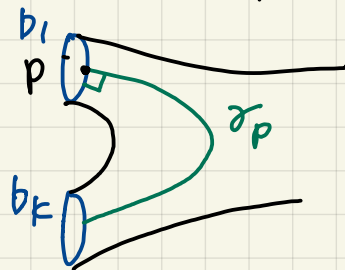
証明のスケッチ (Ref. Mirzakhani の原論文, Stanford Witten '20, Stanford '23.)

① 境界の内側の注目. $b_1 V_{g,n}(b_1, B) = \int_0^{b_1} dp V_{g,n}(b_1, B)$

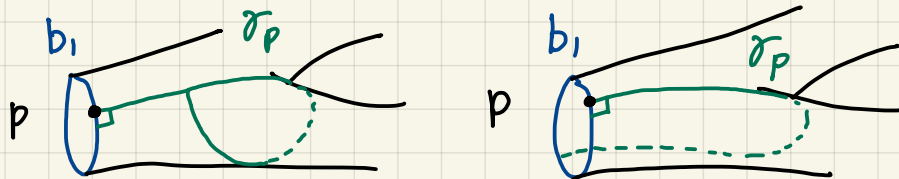


② p を以下の2種類に分類 (γ_p は p が垂直に出る測地線)

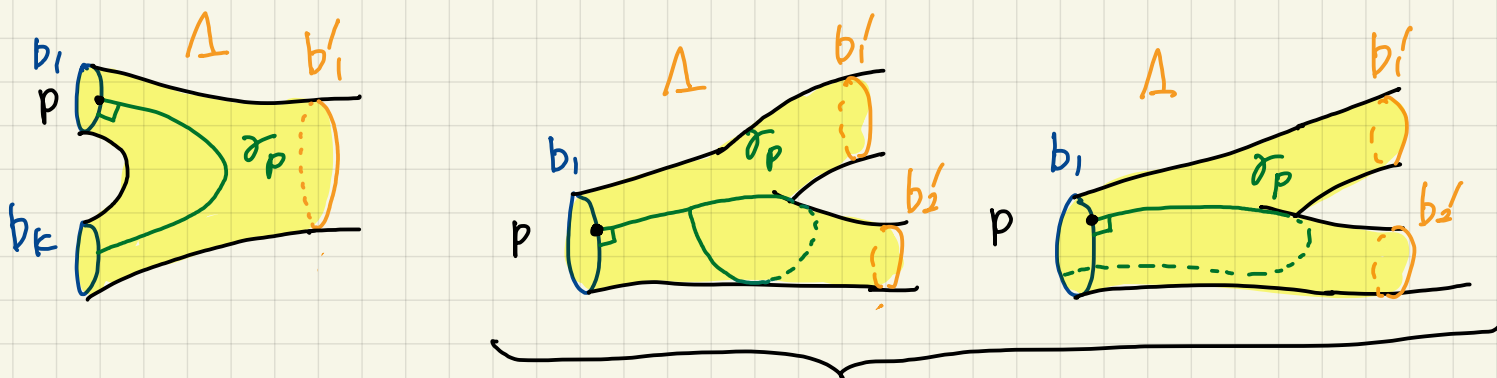
(i) $p \in B_k$: γ_p が k 番目の境界と交わる



(ii) $p \in A$: γ_p が自分自身または出発した境界と交わる

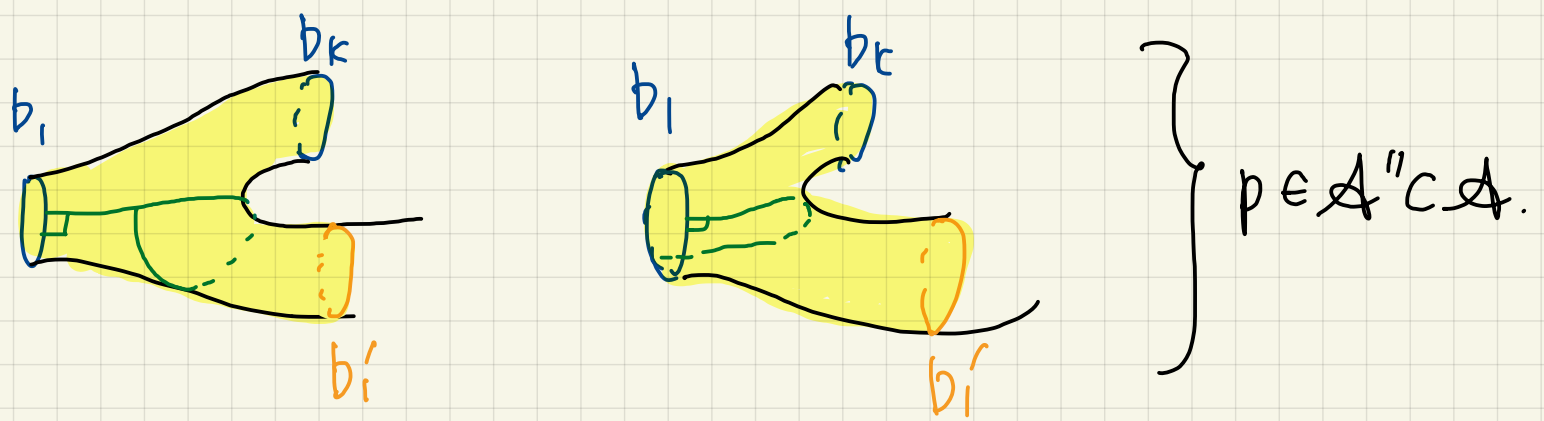


③ γ_p , b_1 , b_k を含む部分領域を thickening する.



$p \in A' \subset A$

境界の長さは
minimize した geodesic に近づける.



p を一つ決めた瞬間に境界近傍の110°分解のしかたは決まってしまう。

④ 積分の分割

$$b_1 V_{g,n}(b_1, B) = \int_0^{b_1} dp \int \mu_{g,n} [d\hat{g}]$$

$$= \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 \int_{\mathcal{A}'} dp \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right]$$

$$+ \sum_k \int_0^\infty b'_1 db'_1 \left[\int_{B_k} dp + \int_{\mathcal{A}''} dp \right] \text{diagram 3}$$

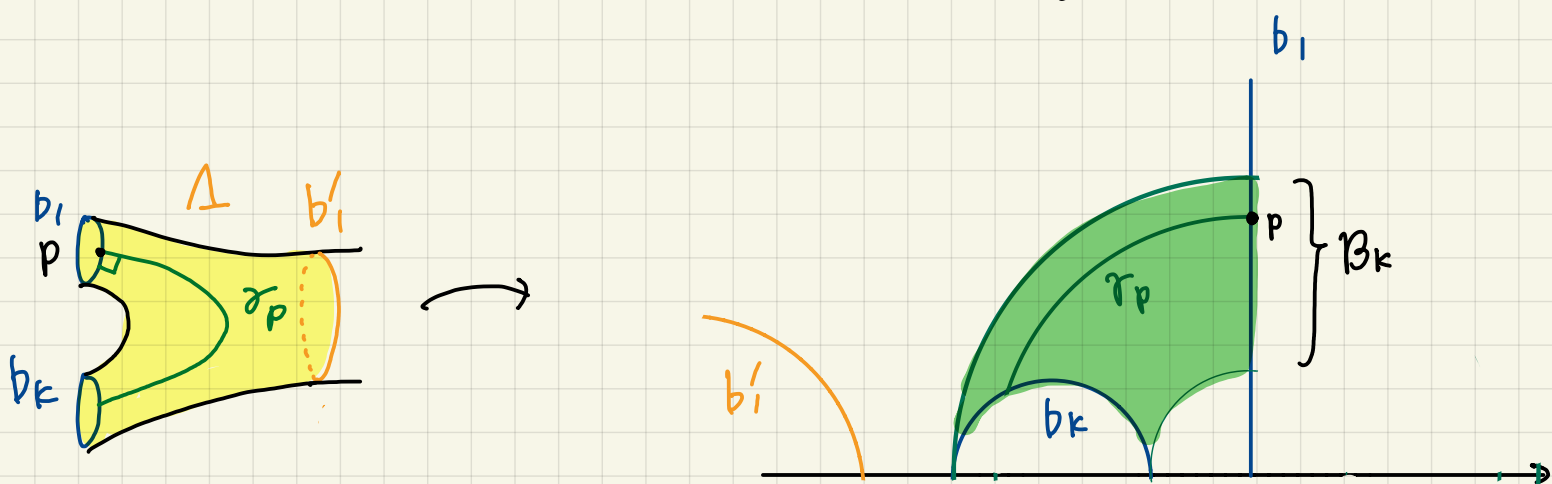
$$\textcircled{5} \quad D(b_1, b'_1, b'_2) := \int_{\mathcal{A}'} dp$$

$$D(b_1, b_k, b'_1) := \int_{\mathcal{A}''} dp$$

$$T(b_1, b_k, b'_1) := \int_{B_k} dp$$

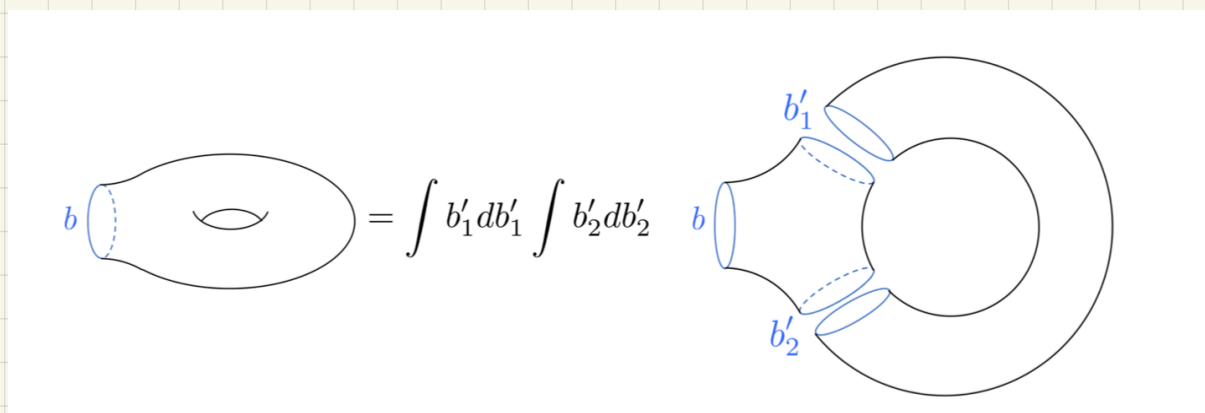
$$b_1 = \left[\int_{\mathcal{A}'} + \int_{\mathcal{A}''} + \int_{B_k} \right] dp \text{ ので, } D \text{ の } T \text{ の } \text{SSA} \text{ を使えば OK.}$$

例えば T は Δ を下のように上半平面にうつこんで計算す。



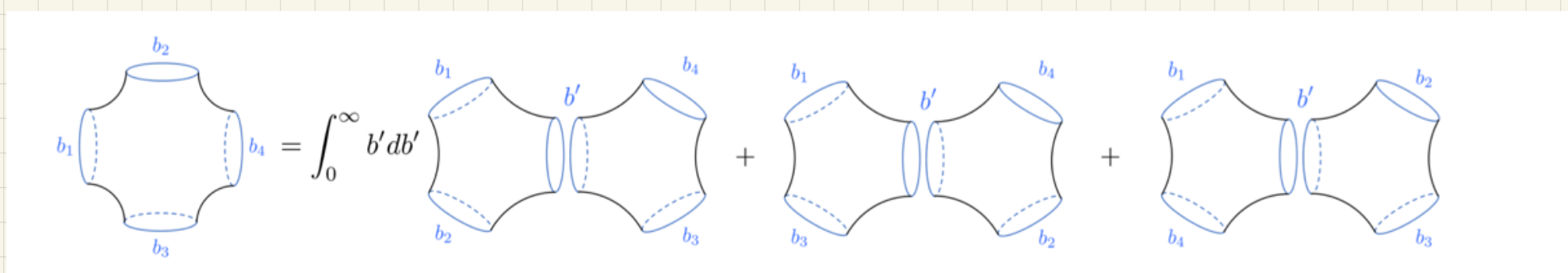
Mirakani 漸化式による計算例

$$(g,n)=(1,1)$$



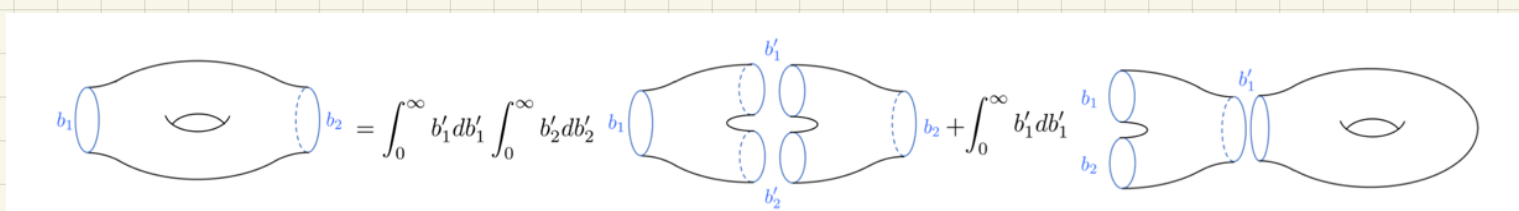
$$V_{1,1}(b) = \frac{1}{2} \int_0^\infty b'_1 db'_1 \int_0^\infty b'_2 db'_2 D(b, b'_1, b'_2) \cdot \delta(b'_1 - b'_2) = \frac{1}{48} (4\pi^2 + b^2)$$

$$(g,n)=(0,4)$$



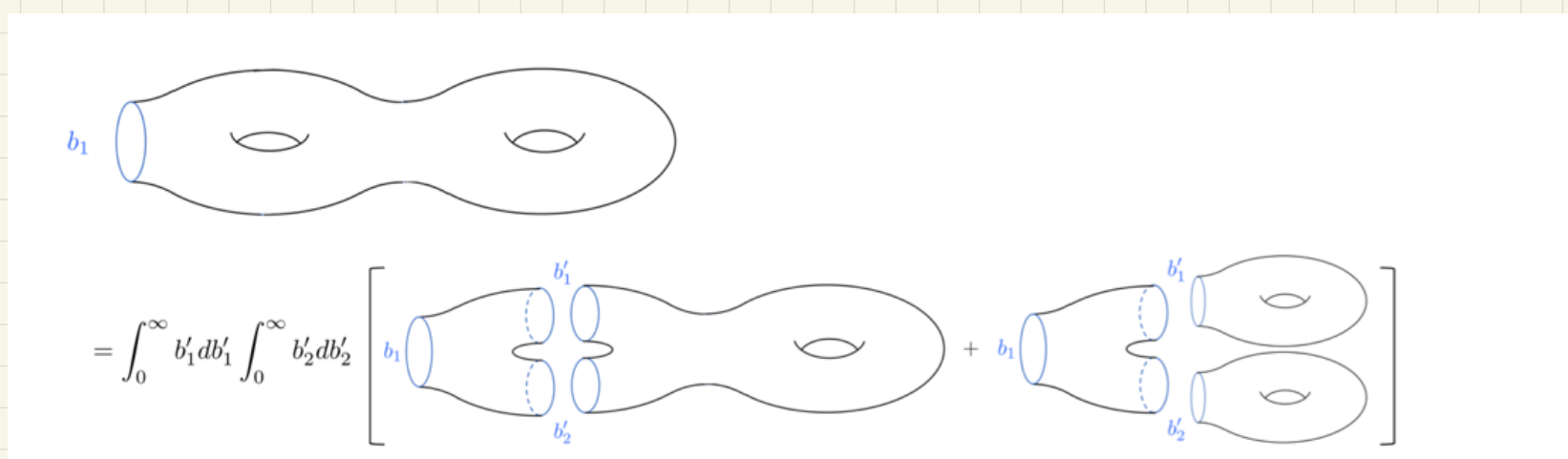
$$V_{0,4}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \frac{1}{2} (4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$$

$$(g,n)=(1,2)$$



$$V_{1,2}(b_1, b_2) = \frac{1}{192} (4\pi^2 + b_1^2 + b_2^2) (12\pi^2 + b_1^2 + b_2^2)$$

$$(g,n)=(2,1)$$



$$V_{2,1}(b_1) = \frac{1}{2211840} (4\pi^2 + b_1^2) (12\pi^2 + b_1^2) (6960\pi^4 + 384\pi^2 b_1^2 + 5b_1^4)$$

5. Schwarz 理論

Ref. Stanford-Witten '17 $\mathbb{Z}_2$

* Schwarz理論は 1-loop exact.

(定理: Duistermaat - Heckman)

$$(\mathcal{U}, \Omega) = 2n\text{-dim. sympl. mfd.} \quad H \in C^\infty(\mathcal{U}) \quad \text{ハミルトンのため有限次元}$$

V : vector field s.t. $\mathcal{L}_V \Omega = dH$ かつ $V(1)$ の生成子. ($\mathcal{L}$: 内部積)

$$\eta := \frac{\Omega^n}{n!} : \text{Volume form}$$
$$I = \int_{\mu} \exp\left(\frac{-1}{g^2} H\right) \eta$$
 は停留点まわりの 1-loop 計算が厳密な結果と一致.

証明のステップ

$$I = \int_{\mathcal{M}} \exp\left(-\frac{1}{g_1} H + \Omega\right) \quad \left(e^{\Omega} := \sum_k \frac{1}{k!} \Omega^k\right)$$

$$\{x^{\bar{z}}\}_{\bar{z}=1}^{2n} : \mathcal{M} \text{ 上の c.d.m.t.} \quad \psi^{\bar{z}} := dx^{\bar{z}}.$$

外積の反対称性より $\psi^i_{\Lambda} \psi^j = -\psi^j_{\Lambda} \psi^i \rightarrow \chi^i$ は "boson", ψ^i は "fermion" である。

$$Q := d + \frac{1}{g} Z_V \text{ かつ } \epsilon.$$

$$Qx^i = \psi^i, \quad Q\psi^i = \frac{1}{g^2} V^i \quad (V = V^i \partial_i)$$

↳ QFT susy 破壊 $\in \mathbb{Z}_2$. $\rightarrow$ この susy 破壊 localization $\in \mathbb{Z}_2$.

$$Q^2 = \frac{1}{g_2} L_V \rightarrow Q^2 \text{ 在 } U(1) \text{ 变换 } \varepsilon \rightarrow L_2.$$

$$\bar{z} z'' - Q^2 \Omega = \frac{1}{g_1} (dz dv + z v d\Omega) = 0.$$

$$Z(t) := \int \exp\left(-\frac{1}{g^2} H + \Omega - t Q \Omega\right) \psi d\psi.$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= - \int Q W \exp\left(-\frac{1}{g_2} H + \Omega - t Q \Omega\right) \\ &= - \int Q \left[W \exp\left(-\frac{1}{g_2} H + \Omega - t Q \Omega\right) \right] \left(Q \left(-\frac{1}{g_2} H + \Omega\right) = -\frac{1}{g_2} dH + \frac{1}{g_2} z_v \Omega = 0. \right) \\ &= - \int dI = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore Z(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)$$

$$\therefore I = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{1}{g^2} H + \Omega - t Q \Omega \right)$$

$Q \cdot \Omega = 0$ かつ $Z_V \Omega = dH = 0$ が支配的
 $\hookrightarrow H$ の停留点.

Schwartz 理論の場合, $H = \text{Isch.}$ $\Omega = \text{KKS形式}$, $V = \theta' \partial_\theta$ (τ に関する微小変位)

と取れば, DH公式の条件をみたす!!

Gauss積分 & zeta関数正則化 を使って.

$$\begin{aligned} Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) &= e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{n} \\ &\downarrow \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta) &= e^{-\frac{\gamma b^2}{\beta}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\beta}{\gamma} \frac{1}{n} \\ &\downarrow \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma b^2}{\beta}} \end{aligned}$$

n : ψ をFourier変換したときのmode.

($n=0, 1$ は $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ の生成子
~ Killing vec. に対応)

($n=0$ は $U(1)$ の生成子)

6. まとめ

$$\int [dg] [d\Phi] e^{\frac{1}{2} \int \Phi(R+2) + \int \Phi(R-1)} = \int [dg] \delta(R+2) e^{\int \Phi(R-1)} \leadsto \text{WP体積} \times \text{Schwarz理論}$$

★ Disk型の分配関数は Schwarz理論の分配関数.

$$Z_{0,1}(\beta) = \int_{\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2,\mathbb{R})} [d\theta] e^{-I_{\text{Sch}}[\tan \frac{\theta}{2}]}$$

$$Z_{0,2}(\beta_1, \beta_2) = \int_{b \in (0, \infty)} [dg_{\text{bulk}}(b)] \quad Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_1, b) Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_2, b)$$

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta, b) := \int_{\text{Diff}(S^1)/U(1)} [d\theta] e^{-I_{\text{Sch}}[\tanh \frac{\theta}{2}]}$$

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_{m=1}^n \int_{b_m \in (0, \infty)} [dg(b_m)] Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta_m, b_m) \cdot V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$$

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) := \int [d\hat{g}(b_1, \dots, b_n)]$$

★ JT重力 $\rightarrow$ Schwarz理論 & 計量の空間の体積.

$\hookrightarrow$ Duistermaat-Hedeman's 4-loop exact.

$\hookrightarrow$ Mirzakhani's 漸化式

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Disk}}(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi^2}{\beta}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$Z_{\text{Sch}}^{\text{Trp}}(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma b^2}{\beta}}$$

例 $Z_{0,1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi^2}{\beta}}$

$$Z_{0,2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$Z_{0,3} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3}$$

$$Z_{g,n} = \int \prod_{m=1}^n \left[b_m db_m \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\beta_m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b_m^2}{4\beta_m}} \right] V_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1}{\beta_1 \dots \beta_n}} \underbrace{\int \prod_{m=1}^n dx_m e^{-\frac{1}{2\beta_m} x_m}}_{x_m := \frac{b_m^2}{2}} V_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$$

$\hookrightarrow$ Weil-Petersson体積の Laplace変換.

ちなみに. Mirzakhani漸化式から, $V_{g,n}$ は b_m^2 の多項式で次数はたかだか $3g+n-3$

$$V_{g,n}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{\substack{k, d_i \\ k+d_1+\dots+d_n=3g+n-3}} \pi^k V_{d_1, \dots, d_n}^{g,n} b_1^{2d_1} \dots b_n^{2d_n}$$

↓

$$Z_{g,n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \sqrt{\beta_1 \dots \beta_n} \sum_{\substack{k, d_i \\ k+d_1+\dots+d_n=3g+n-3}} 2^{3g+n-3-k} d_1! \dots d_n! \pi^{k+\frac{n}{2}} V_{d_1, \dots, d_n}^{g,n} \beta_1^{d_1} \dots \beta_n^{d_n}$$

↪ β_m は 2 回しかたかだか
 $3g+n-3$ 次の多項式

例

$$\begin{aligned} Z_{1,1}(\beta) &= \frac{\sqrt{\beta}(\pi^2 + \beta^2)}{6\sqrt{\pi}}, \\ Z_{0,4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \frac{2\sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \pi^2)}{\pi}, \\ Z_{1,2}(\beta_1, \beta_2) &= \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}[2(\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2) + 4\pi^2(\beta_1 + \beta_2) + 3\pi^4]}{12\pi}, \\ Z_{0,5}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) &= \frac{32\sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5} \left[5\pi + 2 \left(\sum_{i=1}^5 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^5 \beta_i + 3\pi^2 \right) \right]}{\sqrt{\pi^5}}, \\ Z_{2,1}(\beta) &= \frac{48\sqrt{\beta} (40\beta^4 + 232\pi^2\beta^3 + 556\pi^4\beta^2 + 676\pi^6\beta + 435\pi^8)}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

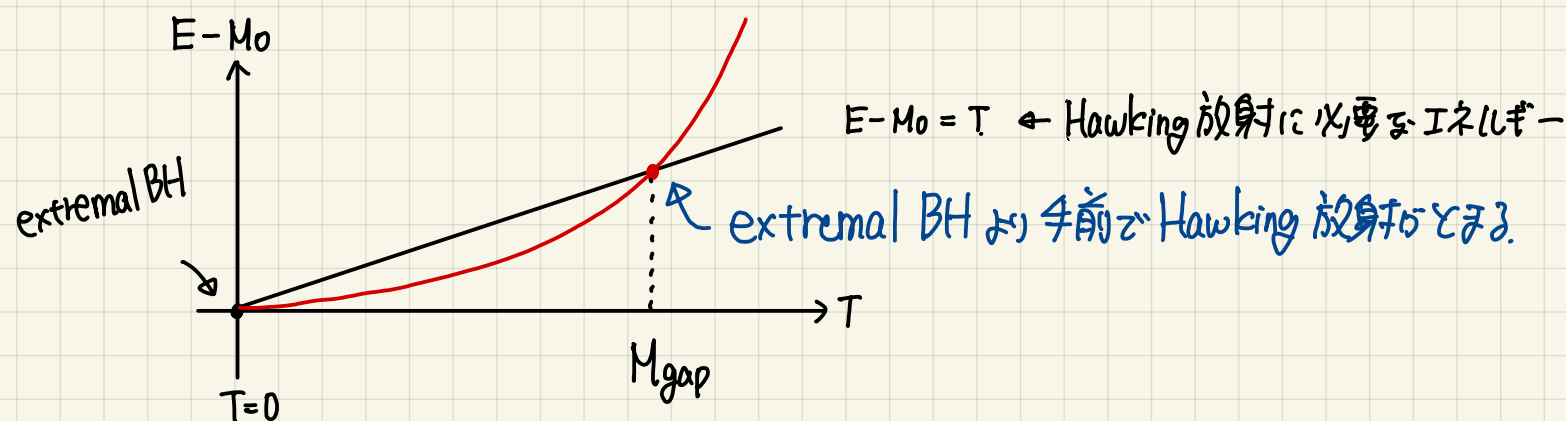
7. 応用

Mass gap problem

Iliesiu-Turiaci '23

E : black hole energy M_0 : extremal BH mass

semiclassical limit $E - M_0 \propto T^2$

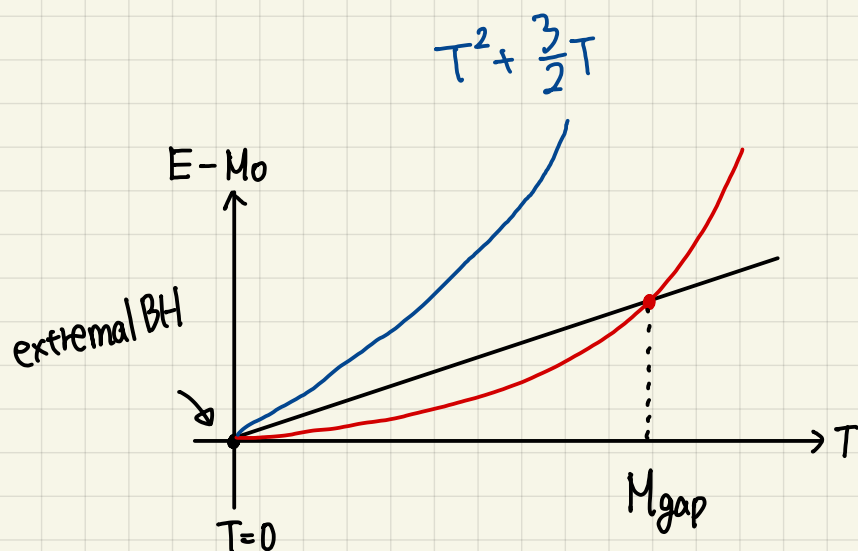


$$Z_{0,1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{2\pi^2\gamma}{\beta}}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{1}{\beta} \log Z_{0,1} = -\frac{2\pi^2\gamma}{\beta^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\beta} \log \frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{2\beta} \log 2\pi$$

$$E = \frac{2\pi^2\gamma}{\beta^2} + \frac{3}{2\beta} = T^2 + \frac{3}{2}T$$

量子補正



→ Hawking 放射は止まる.

ランダム行列との双対性

Saad-Sherker-Stanford '19

Stanford-Witten '20

ランダム行列 ... $N \times N$ Hermite 行列を確率変数とみなす確率理論

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \int dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]} A(H)$$

確率密度

Ref. Eynard-Kimura-Ribault '15
[1510.04930]

$$Z(\beta) := \text{Tr}[e^{-\beta H}] : \text{分配和}$$

Ginsparg-Moore '93

[9304011]

$$Z^{\text{RM}}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \langle Z(\beta_1) \dots Z(\beta_n) \rangle$$

Francesco-Ginsparg-Justin '95

[9306153]

Eynard '04 [0407261]

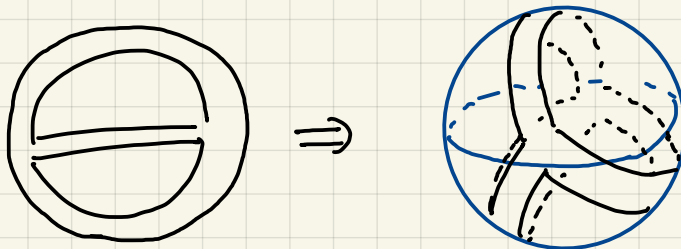
$$Z = \int dH e^{-N \text{Tr}[V(H)]}$$

- ↳ 0次元上の行列値の場の理論
 ・ 行列なので Feynman 図をなすと propagator は 2重線

↓

真空連結 Feynman 図 は 2次元面と対応,

例



$$\log Z = \text{circle} + \text{circle with one handle} + \text{circle with two handles} + \dots$$

- ・ $\text{Tr}[e^{-\beta H}]$ の挿入 $\Rightarrow$ 長さを β の境界の挿入に対応

$$Z^{\text{RM}}(\beta_1, \dots, \beta_n) := \langle Z(\beta_1) \dots Z(\beta_n) \rangle$$

$$= \text{diagram with two boundary components} + \text{diagram with one handle and two boundary components} + \text{diagram with two handles and two boundary components}$$

$$\hookrightarrow \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2g+n-2}} \underline{Z_{g,n}^{\text{RM}}(\beta_1, \dots, \beta_n)}$$

のように genus 展開可能.

- ・ Mirzakhani 漸化式の導かれる
 JT の分配関数と (ある極限で) 一致
 ・ 同じような漸化式をみたす