

# 弦理論入門

川平将志

## 概要

場の量子論は知っているが、弦理論を知らない人向けの解説ノートである<sup>\*1</sup>。といっても、筆者も大して弦理論を知らないので、疑いの目を持って読んでほしい。

## 1 はじめに

### 1.1 なぜ弦理論を考えるのか？

弦理論とは、弦を基本的自由度とする量子論のことで、自然に重力子を含むため量子重力理論の一種とも言われている。弦理論以外の量子重力理論もあるが、重力子の散乱を一般共変に記述できるのは、今のところ（たぶん）弦理論だけである<sup>\*2\*3</sup>。また、非常に多彩な性質をもち、量子重力に興味がない人にとっても、格好の遊び場となっている。

### 1.2 本文書で扱う範囲

弦理論と一口にいても、大きく3つに大別される。

- 摂動的に定義される弦理論
- 有効理論との整合性から示唆される非摂動的な弦理論（M 理論、F 理論）
- 具体的に構成される非摂動的な弦理論（弦の場の量子論）

1 つ目の特に「散乱振幅の計算方法」に本文書では焦点を当てる<sup>\*4\*5</sup>。これを通して、「**世界面上のアノマリー相殺から、時空の構造が定まる**」というアイディアを伝えたい。

---

<sup>\*1</sup> 正直に言うと、Polchinski の教科書 [1] の劣化コピーである。

<sup>\*2</sup> 逆に重力子の散乱が記述できるような量子論があるとすれば、弦理論でなくともその摂動論には必ず弦のような励起モードが伴うことが知られている。

<sup>\*3</sup> 色々と面白い話が [2] に書かれている。

<sup>\*4</sup> とっても、散乱振幅の計算の詳細には立ち入らないことをご容赦願いたい。

<sup>\*5</sup> 実際には、3 つを組み合わせることで、弦理論から様々な面白いことが引き出される。

### 1.3 摂動的弦理論の概要

点粒子の量子多体系を記述する理論を場の量子論と言ったように、弦の量子多体系を記述するのが（摂動的な）弦理論である<sup>\*6</sup>。

- 場の量子論・・・点粒子の量子多体系
- 弦理論・・・弦の量子多体系

弦には輪ゴムのように端のない閉弦と、端のある開弦がある。この閉弦と開弦は異なる物体というわけではなく、閉弦が千切れて開弦になる過程もあれば、逆に開弦の端同士がくっついて閉弦になるような過程もある。

弦理論において、弦はその長さに依らず一定の張力  $T_{\text{string}}$  を持つと要請する<sup>\*7</sup>。ゆえに長さ  $R$  の弦は

$$E = T_{\text{string}} R \quad (1.1)$$

だけのエネルギーを持つ。また、次元解析から弦の典型的長さ  $\ell_{\text{string}}$  は

$$T = \frac{1}{\ell_{\text{string}}^2} \quad (1.2)$$

で与えられる。この  $\ell_{\text{string}}$  が弦理論の唯一のパラメタである。典型的な場の量子論が複数のパラメタをもつのは状況が大きく異なる。

弦理論で長さ  $L$  のスケールの物理を考えると、もし  $\ell_{\text{string}} \ll L$  が成り立つのならば、弦はもはや点粒子と区別がつかない。そのため、弦理論は  $\ell_{\text{string}} \ll L$  の極限で場の量子論に帰着することが期待される。実際この期待は正しく、得られる場の量子論を（弦理論の）有効理論と呼ぶ。有効理論は M 理論や F 理論などの非摂動的な弦理論の示唆を与えるという点で重要である。

以上で説明した摂動的弦理論は、世界面の方法と呼ばれる方法で定式化される。これは場の量子論の摂動的定式化の一種である世界線の方法<sup>\*8</sup>のアナロジーである。本書は、なるべく世界線の方法を知らなくても読めるように書いているが、可能ならば適当な教科書で世界線の方法を勉強してもらいたい。

---

<sup>\*6</sup> わかりやすい「弦」というイメージが成立するのは、あくまで摂動的な範囲に限られることに注意。例えば、M 理論の基本自由度は弦ではなく膜である。

<sup>\*7</sup> この要請は、もともと弦理論がハドロンのスペクトラムを記述するために開発されたことに起因する。

<sup>\*8</sup> と言っても、世界線の方法は古（いにしえ）の技術とでも言うべきもので、現代の場の量子論の教科書ではあまり扱わない訳だが....

## 2 ボゾン弦理論の古典論

### 2.1 設定

本節ではボゾン弦理論を与える．これは最も簡単に導入できる弦理論と言える．世界面の方法を実行するために、次の2つの幾何を用意する．

- 世界面  $\Sigma$

… 2次元 Riemann 面<sup>\*9</sup>であって計量  $h_{ab}$  を備えたもの． ( $a, b = 0, 1$ )

- ターゲット時空  $M$

…  $d$ 次元 Riemann 多様体<sup>\*10</sup>であって計量  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ 、2階反対称テンソル場  $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ <sup>\*11</sup>、スカラー場  $\Phi$  を備えたもの． ( $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1$ )

十分に滑らかな写像

$$\begin{array}{ccc} X: & \Sigma & \longrightarrow & M \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & (\sigma^0, \sigma^1) & \longmapsto & (X^0(\sigma^0, \sigma^1), \dots, X^{d-1}(\sigma^0, \sigma^1)) \end{array} \quad (2.1)$$

を考える．時空  $M$  の中の**弦の軌跡**は、 $X(\Sigma)$  およびその上の誘導計量

$$\gamma_{ab}(\sigma) = (\partial_a X^\mu(\sigma))(\partial_b X^\nu(\sigma))\mathcal{G}_{\mu\nu}(X(\sigma)) \quad (2.2)$$

で与えられる<sup>\*12</sup>．

弦理論では  $\Sigma$  上に作用を定義する．

$$\begin{aligned} S_\Sigma[X, h] := & \frac{T}{2} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{\det(h)} (h^{ab}\mathcal{G}^{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab}\mathcal{B}^{\mu\nu}(X)) \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{h} \Phi(X) R + (\text{boundary term}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

これを **Polyakov 作用**という<sup>\*13</sup>．この運動方程式によって、弦の軌跡が決定される．ここで力学的変数は  $X, h$  である．また  $\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{B}_{\mu\nu}, \Phi$  は外場であり、それぞれを**グラビトン**、 **$B$  場**、**ディラトン**と呼称し、これらの配位を**背景**と呼ぶ．

<sup>\*9</sup> この文書では向きづけ可能な場合に限定して考える．

<sup>\*10</sup> Euclid 化した notation で話を進めている．もし Euclid 化しないならば擬 Riemann 多様体になる．

<sup>\*11</sup> つまり、gerbe の接続 2 形式である．

<sup>\*12</sup> 実際に我々に見えているのは世界面  $(\Sigma, h)$  ではなく、弦の軌跡  $(X(\Sigma), \gamma)$  である．その意味で、世界面  $\Sigma$  やその上の計量  $h_{\alpha\beta}$  それ自体に物理的意味はないと言える．

<sup>\*13</sup> 本文書では面倒なのでしばしば boundary term を省略する．(まあいい感じになっていると思うください....)

## 2.2 Polyakov 作用と Nambu-Goto 作用

少し脇道に逸れるが，感覚を掴むために少し Polyakov 作用で遊ぼう．試しに外場が

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu}(X) \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(X) = 0 \\ \Phi(X) = \phi_0 \text{ (constant)} \end{cases} \quad (2.4)$$

である場合の古典的振る舞いについて考察してみる．このとき，Euler 数が  $\chi(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{h} R$  と与えられることを使うと，Polyakov 作用は

$$S_{\Sigma}[X, h] := \frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(h)} h^{ab} \gamma_{ab} + \phi_0 \chi(\Sigma) \quad (2.5)$$

となる．ここで  $h$  で変分を取ると，右辺第 2 項目は消えることに注意して

$$S_{\Sigma}[X, h + \delta h] - S_{\Sigma}[X, h] = \frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(h)} \delta h^{ab} \left( \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \gamma_{cd} \right) \quad (2.6)$$

$$\therefore \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \gamma_{cd} = 0 \quad (2.7)$$

が得られる．ここで  $e^{-\omega(\sigma)} = \frac{1}{2} h^{cd}(\sigma) \gamma_{cd}(\sigma)$  と定義すると，古典解は

$$h_{ab}^{\text{cl}} = e^{\omega(\sigma)} \gamma_{ab} \quad (2.8)$$

で与えられる．

これを元の作用に代入して

$$\begin{aligned} S_{\Sigma}[X, h^{\text{cl}}] &= \frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(h^{\text{cl}})} (h^{\text{cl}})^{ab} \gamma_{ab} + \phi_0 \chi(\Sigma) \\ &= \frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(\gamma)} \gamma^{ab} \gamma_{ab} + \phi_0 \chi(\Sigma) \\ &= T \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(\gamma)} + \phi_0 \chi(\Sigma) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる．ただし  $\gamma^{ab} \gamma_{ab} = 2$  であることを使った．

得られた式の第 2 項目は定数なので，弦の古典的運動は

$$\tilde{S}_{\Sigma}[X] = T \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(\gamma)} \quad (2.10)$$

で決定される．これを **Nambu-Goto 作用** という．この表式では世界面上の計量  $h$  は影を潜め，弦の軌跡の計量  $\gamma$  で表されているため，物理的解釈がしやすくなっている．実際， $\text{Area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\det(\gamma)}$  が  $\Sigma$  の面積を与えていることに気づくと，粒子の作用

$$m \int ds \quad (2.11)$$

の自然な 2 次元版となっていることがわかる．

### 3 ボゾン弦理論の量子論

#### 3.1 散乱振幅の概観

$n$  点散乱振幅の計算方法を説明する．そのために場の量子論における  $n$  点散乱振幅とはどのような量であったかを復習しよう．これは  $n$  個の漸近状態  $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$  に対して定まる量

$$\mathcal{A}_n(v_1, \dots, v_n) \quad (3.1)$$

であった．そして， $\mathcal{A}_n(v_1, \dots, v_n)$  は次のような和で与えられる．

$$\mathcal{A}_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) \quad (3.2)$$

これをループ展開と呼び， $g$  は Feynman 図のループの数に対応している．

以上の構造は弦理論でも同様である．よって与えるべきは  $\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n)$  の計算方法である．世界面の方法によると，閉弦の場合<sup>\*14</sup>には「大体」

$$\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) = \int_{\Omega_{n,g}^{\text{grav}}} \mathcal{D}h \int_{\Omega_{n,g}^{\text{mat}}(v_1, \dots, v_n)} \mathcal{D}X e^{-S_{\Sigma_{n,g}}[X, h]} \quad (3.3)$$

と与えられる．ただし， $\Sigma_{n,g}$  は無限遠方に  $n$  個の境界をもつ，種数  $g$  の世界面である．また， $v_1, \dots, v_n$  は，場  $X$  の境界条件<sup>\*15</sup>を表し，それで定まる汎関数積分範囲を  $\Omega_{n,g}^{\text{mat}}(v_1, \dots, v_n)$  とした．同様に計量  $h$  の経路積分の範囲を  $\Omega_{n,g}^{\text{grav}}$  と表記している．

<sup>\*14</sup> 開弦の場合には，D ブレーンを導入する必要があり面倒なので省略する．

<sup>\*15</sup> 境界条件  $v_1, \dots, v_n$  は，境界上の状態ベクトル  $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$  とみなすこともできる．これが弦理論における漸近状態である．

### 3.2 微分同相対称性・Weyl 対称性

式 (3.3) を「大体」と言ったのは、このままでは、計量  $h$  に由来する自由度が世界面上を伝播しうるためだ。これを除くために、**微分同相対称性**と **Weyl 対称性**を利用する。

まず、**微分同相変換**  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $\sigma \mapsto f(\sigma)$  を考える。この下でスカラー場  $X$  と、2 階対称テンソル場  $h$  は次のように変換する。

$$X \mapsto f^*X, \quad h \mapsto f^*h \quad (3.4)$$

ただし

$$(f^*X)(\sigma) := X(f(\sigma)), \quad (3.5)$$

$$(f^*h_{ab}(\sigma)) := h_{cd}(f(\sigma)) \frac{\partial f(\sigma)^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial f(\sigma)^d}{\partial \sigma^b} \quad (3.6)$$

と定義した<sup>\*16</sup>。微分同相変換は群をなすため、この群を  $\text{Diff}_2$  と表記する<sup>\*17</sup>。また、**Weyl 変換**は次のように定義される。

$$X(\sigma) \mapsto X(\sigma), \quad h(\sigma) \mapsto e^{\omega(\sigma)} h(\sigma) \quad (3.7)$$

これも群をなすため、Weyl と表記する。

ここで次のような性質が満たされていると考えてみよう。

#### ゲージアノマリー相殺

式 (3.3) の被積分パート

$$Z_h(v_1, \dots, v_n) = \int_{\Omega^{\text{mat}}(v_1, \dots, v_n)} \mathcal{D}X e^{-S_{\Sigma_{n,g}}[X, h]} \quad (3.8)$$

は微分同相変換と Weyl 変換の下で不変である。

このとき、積分範囲を  $\Omega_{n,g}^{\text{grav}}$  ではなく

$$\Omega_{n,g}^{\text{grav}} / (\text{Diff}_2 \times \text{Weyl}) \quad (3.9)$$

に置き換えることができる。これを**ゲージ化**と呼ぶ<sup>\*18</sup>。このとき、式 (3.8) が成立しない

<sup>\*16</sup> 引き戻しである。

<sup>\*17</sup> 添字の「2」は 2 次元の微分同相変換であることを意味している。

<sup>\*18</sup> 伝統的な場の量子論の本ではあまりこういう言い方はしないが、最近の文脈でのゲージ化と言えば、「自由度を割ること」を意味することも少なくない。

ことを、「ゲージアノマリーがある」といい、成立することを「ゲージアノマリーが相殺している」という。

ゲージ化を実行すると、 $h$  の自由度は完全に取り除ける。なぜなら、 $h$  は3つの関数自由度

$$h_{00}(\sigma), \quad (3.10)$$

$$h_{01}(\sigma) = h_{10}(\sigma), \quad (3.11)$$

$$h_{11}(\sigma) \quad (3.12)$$

をもつが、これらはゲージの自由度  $f(\sigma)^0, f(\sigma)^1, \omega(\sigma)$  で固定し切れるからだ<sup>\*19</sup>。そのおかげで、 $\Omega_{n,g}^{\text{grav}}$  は無限次元であったが、 $\Omega_{n,g}^{\text{grav}}/(\text{Diff}_2 \times \text{Weyl})$  は有限次元になる。これは  $h$  に由来する自由度がほとんど残っていないことを意味している。

以上より、弦理論での散乱振幅は、式 (3.3) ではなく正確には

$$\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) = \int_{\Omega_{n,g}^{\text{grav}}/(\text{Diff}_2 \times \text{Weyl})} \mathcal{D}h \, Z_h(v_1, \dots, v_n) \quad (3.14)$$

で与えられる。

### 3.3 状態・演算子対応

この節では、アノマリーが相殺していると仮定しよう。このとき微分同相変換と Weyl 変換を活用することで、式 (3.14) の表示を簡単化することができる。

微分同相変換と Weyl 変換を組み合わせることで、世界面  $(\Sigma_{n,g}, h)$  は、 $n$  個のパンクチャー付きの種数  $g$  の世界面に置き換えることができる<sup>\*20</sup>。よって、 $n$  点付きの種数  $g$  の Riemann 面の計量の同値類のなす空間を  $\mathcal{M}_{n,g}$  とおくと

$$\Omega_{n,g}^{\text{grav}}/(\text{Diff}_2 \times \text{Weyl}) \cong \mathcal{M}_{n,g} \quad (3.17)$$

---

<sup>\*19</sup> 実際、局所的に  $h(\sigma)$  は微分同相変換で

$$e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab} \quad (3.13)$$

とできることが知られており、これは Weyl 変換で  $\delta_{ab}$  にできる。

<sup>\*20</sup> これを実感するには、

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.15)$$

で  $r = e^\tau$  とおくと

$$ds^2 = e^{2\tau} (d\tau^2 + d\theta^2) \quad (3.16)$$

となることを見れば良い。よって、穴あきディスク ( $0 < r \leq 1$ ) は半無限円筒 ( $\infty < \tau \leq 0$ ) に Weyl 変換で移りあう。

が成り立つ。よって

$$\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) = \int_{\mathcal{M}_{n,g}} \mathcal{D}h \, Z_h(v_1, \dots, v_n) \quad (3.18)$$

となる。また、ここで境界はパンクチャーに置き換えられているため、境界条件  $v_1, \dots, v_n$  は演算子  $V_1, \dots, V_n$  の挿入に置き換えられる。

$$\begin{aligned} Z_h(v_1, \dots, v_n) &= \int_{\Omega_g^{\text{mat}}} \mathcal{D}X \, V_1(\xi_1) \cdots V_n(\xi_n) e^{-S_{\Sigma_g}[X,h]} \\ \therefore \mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) &= \int_{\mathcal{M}_{n,g}} \mathcal{D}h \int_{\Omega_g^{\text{mat}}} \mathcal{D}X \, V_1(\xi_1) \cdots V_n(\xi_n) e^{-S_{\Sigma_g}[X,h]} \end{aligned} \quad (3.19)$$

である。ここで  $\Sigma_g := \Sigma_{n=0,g}$  とした。

さらに  $\mathcal{M}_g := \mathcal{M}_{n=0,g}$  とおくと、 $\dim \mathcal{M}_{n,g} = \dim \mathcal{M}_g + 2n$  が成り立つため<sup>\*21</sup>

$$\int_{\mathcal{M}_{n,g}} \mathcal{D}h = \int_{\mathcal{M}_g} \mathcal{D}h \prod_{i=1}^n \int_{\Sigma_{n,g}} d^2\xi_i \quad (3.20)$$

となる。したがって次の表式を得る。

$$\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) = \int_{\mathcal{M}_g} \mathcal{D}h \int_{\Omega_g^{\text{mat}}} \mathcal{D}X \, S_1 \cdots S_n e^{-S_{\Sigma_g}[X,h]} \quad (3.21)$$

ただし

$$\begin{aligned} S_i &:= \int_{\Sigma_{n,g}} d^2\xi_i V_i(\xi_i) \\ &= \int_{\Sigma_{n,g}} d^2\xi_i \sqrt{\det(h)} \mathcal{V}_i(\xi_i) \end{aligned} \quad (3.22)$$

である。（後々の見やすさのために、 $\sqrt{\det(h)}$  を括り出したものを  $\mathcal{V}_i$  と定義した。）

### 3.4 アノマリー相殺条件

アノマリーが相殺する条件を調べていこう。元々は  $Z_h(v_1, \dots, v_n)$  が微分同相不変かつ Weyl 不変であることを要請していたが、ここでは代わりに

$$Z_h(S_1, \dots, S_n) := \int_{\Omega_g^{\text{mat}}} \mathcal{D}X \, S_1 \cdots S_n e^{-S_{\Sigma_g}[X,h]} \quad (3.23)$$

---

<sup>\*21</sup>  $n, g$  の小さい場合には例外があるので、別の処理が必要になる。

の微分同相不変性と Weyl 不変性を考えることにする．問題を次の 2 つに分けて見ていく．

(1) 経路積分

$$\mathcal{Z}_h := \int_{\Omega_g^{\text{mat}}} \mathcal{D}X e^{-S_{\Sigma_g}[X, h]} \quad (3.24)$$

が微分同相不変かつ Weyl 不変になるための条件

→ 背景  $(\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{B}_{\mu\nu}, \Phi)$  に対する条件

(2) 積分された演算子

$$S_i := \int_{\Sigma_{n,g}} d^2\xi_i \sqrt{\det(h)} \mathcal{V}_i(\xi_i) \quad (3.25)$$

が微分同相不変かつ Weyl 不変になるための条件

→ 漸近状態  $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$  に対する条件

ただし，時間の都合上，ここでは結果だけを見ていく．

■(1) について

経路積分が微分同相不変かつ Weyl 不変であるための条件は，次の 3 つの量がゼロになることである．

$$\beta_{\mu\nu}^{\mathcal{G}} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} \mathcal{H}_{\mu\lambda\omega} \mathcal{H}_\nu{}^{\lambda\omega} + \mathcal{O}(\alpha'^2), \quad (3.26)$$

$$\beta_{\mu\nu}^{\mathcal{B}} = -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\omega \mathcal{H}_{\omega\mu\nu} + \alpha' \nabla^\omega \Phi \mathcal{H}_{\omega\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2), \quad (3.27)$$

$$\beta^\Phi = \frac{d-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\omega \Phi \nabla^\omega \Phi - \frac{\alpha'}{24} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(\alpha'^2). \quad (3.28)$$

ただし， $\alpha'$  はスロープパラメタと呼ばれる量であり，

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (3.29)$$

として定義される．また， $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{B}$  の微分 ( $\mathcal{H} := d\mathcal{B}$ ) である．

大変面白いことに，上の 3 つの量がゼロになるという条件は，背景  $(\mathcal{G}_{\mu\nu}, \mathcal{B}_{\mu\nu}, \Phi)$  に対する運動方程式と思える．これらを導くような作用として，次が得られる．

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int_M d^d x \sqrt{\det(\mathcal{G})} e^{-2\phi} \left[ -\frac{2(d-26)}{3\alpha'} + \mathcal{R} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} \mathcal{H}^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \mathcal{O}(\alpha') \right] \quad (3.30)$$

これを**有効作用**といい、これで定まる理論を**有効理論**という。

この運動方程式の古典解をいくつか見てみよう。まず  $d = 26$  のときには簡単に解を見つけることができる<sup>\*22</sup>。

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(x) = 0 \\ \Phi(x) = \phi_0 \text{ (constant)} \end{cases} \quad (3.31)$$

このとき Polyakov 作用のディラトン項は Euler 数で書き直せる。

$$S_{\Sigma_g}[X, h] := \frac{T}{2} \int_{\Sigma_g} d^2\sigma \sqrt{\det(h)} h^{ab} \delta^{\mu\nu}(X) \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu + \phi_0 \chi(\Sigma_g) \quad (3.32)$$

$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$  なので、

$$\mathcal{A}_{n,g}(v_1, \dots, v_n) = e^{(2g-2)\phi_0} \times (\text{something}) \quad (3.33)$$

となる。ここで**結合定数**

$$g_{\text{string}} := e^{\phi_0} \quad (3.34)$$

を導入すると、最終的に弦の散乱振幅は級数

$$\mathcal{A}_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_g (g_{\text{string}})^{2g-2} \times (\text{something}) \quad (3.35)$$

として書けることがわかる。以上の話からわかるように、弦の結合定数はディラトンによって決定される。もし有効作用  $S_{\text{eff}}$  にディラトンのポテンシャル  $V(\phi)$  が存在すれば弦の結合定数が自動的に決まるが、この理論のポテンシャルは平坦であるために、自由に選ぶことができる<sup>\*23</sup>。

実は  $d = 26$  とは限らない解も考えることができる。

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(x) = 0 \\ \Phi(x) = V_\mu x^\mu \end{cases} \quad (3.36)$$

ただし、

$$V_\mu V^\mu = \frac{26-d}{6\alpha'} \quad (3.37)$$

である。このような解は、**線形ディラトン背景**と呼ばれている。

<sup>\*22</sup> ボゾン弦の場合には  $d = 26$  だが、超弦理論では  $d = 10$  になる。

<sup>\*23</sup> ただし、これは平坦な時空  $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  を選んだ場合の話であり、一般には異なる。

## ■(2) について

微分同相不変かつ Weyl 不変であるような、積分された演算子  $S$  の例を見ていく．ここでは次のような演算子を考えよう．

$$S = \int d^2\xi \sqrt{\det(h)} \mathcal{V}(\xi), \quad (3.38)$$

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{1}{4\pi\alpha'} (h^{ab} e_{\mu\nu}^S + i\varepsilon^{ab} e_{\mu\nu}^{AS}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik_\rho X^\rho} + \frac{1}{4\pi} \phi \mathcal{R} e^{ik_\rho X^\rho} \quad (3.39)$$

ここで、 $e_{\mu\nu}^S$  は対称テンソル、 $e_{\mu\nu}^{AS}$  は反対称テンソル、 $\phi$  は定数である． $\mathcal{V}(\xi)$  を微分同相不変に正則化したもの  $\mathcal{V}(\xi)_{\text{reg}}$  を考え、その Weyl 不変性に着目すれば良い．結果だけを述べると次のような条件を満たせば良いとわかる．

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad (3.40)$$

$$k^\mu e_{\mu\nu}^S = 0, \quad (3.41)$$

$$k^\mu e_{\mu\nu}^{AS} = 0, \quad (3.42)$$

$$\phi = \frac{1+\gamma}{4} (e^S)^\mu{}_\mu \quad (3.43)$$

ただし、 $\gamma$  は正則化に依存する量である．例えば、次の正規順序積を使うと  $\gamma = -2/3$  である<sup>\*24</sup>．

$$\mathcal{V}(\xi)_{\text{reg}}[X] := \exp \left( \frac{\alpha'}{4} \int d^2\xi d^2\xi' \log(d_{\xi,\xi'}^2) \frac{\delta}{\delta X^\mu(\xi)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(\xi')} \right) \mathcal{V}(\xi)[X] \quad (3.44)$$

ここで、 $d_{\xi,\xi'}$  は 2 点間の測地的距離である．

以上で得られた演算子  $\mathcal{V}$  は、次の漸近状態に対応していると解釈できる．

$$|\text{graviton}, k\rangle, |B \text{ field}, k\rangle, |\text{dilaton}, k\rangle \quad (3.45)$$

このようにして、弦理論のスペクトラムが導き出される．

以上の計算は、世界面が平坦な場合にはより簡単に実行できる．なぜなら、単に  $\mathcal{V}(\xi)$  が**マージナル演算子**<sup>\*25</sup>であるとすれば良いからだ．実際、世界面として  $\Sigma = \mathbb{C}$  を考えると

$$\int dz d\bar{z} \mathcal{V}(z, \bar{z}) \quad (3.46)$$

は共形不変になっている．結果として同じスペクトラムが得られる．

<sup>\*24</sup> 次元正則化を用いると  $\gamma = 0$  になる．

<sup>\*25</sup> マージナル演算子とは、重みが  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$  であるようなプライマリ演算子のことである．

## 4 背景の変形と演算子の挿入

前節の議論で、重力子・ $B$  場・ディラトンに対して、背景としての見方と演算子の挿入としての見方があることを確認した。本節では、これらのつながりを説明していく。

ここでは重力子だけに着目してみる。そのために背景が平坦時空から少し揺らいだ場合を考えよう。

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} - \chi_{\mu\nu}(X) \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(X) = 0 \\ \Phi(X) = \phi_0 \text{ (constant)} \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで  $\chi$  は非常に微小だとすると

$$e^{-S_\Sigma|_{\mathcal{G}=\eta-\chi}} = e^{-S_\Sigma|_{\mathcal{G}=\eta}} \left( 1 + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{\det(h)} h^{ab} \chi_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \dots \right) \quad (4.2)$$

と展開できる。

$$\chi_{\mu\nu}(X) = e_{\mu\nu}^S e^{ik_\rho X^\rho} \quad (4.3)$$

とすれば、これは重力子の演算子の挿入に他ならない。

以上により、曲がった時空の背景  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  は、重力子の演算子を指数関数の肩に上げたもの（重力子のコヒーレント状態）として解釈される。

## 5 話せなかったこと

今回は弦理論の中でも非常に狭いトピックを扱った。

弦理論

⊃ 摂動的弦理論

⊃ ボゾン弦理論

⊃ 散乱振幅の計算

⊃ 向き付け可能な閉弦の散乱振幅の計算

しかし、「向き付け可能な閉弦の散乱振幅の計算」というトピックですら、十分に扱えたわけではない。

例えば、実際に散乱振幅を計算し、散乱振幅に紫外発散が生じないことを見るのは重要だが、残念ながら本文書では扱えていない。また、本文書では背景・漸近状態として重力子・ $B$  場・ディラトンだけを考えたが、実際には**タキオン**も存在する。

- $m^2 < 0$ : タキオン
- $m^2 = 0$ : 重力子・ $B$  場・ディラトン
- $m^2 > 0$ : 振動数の高いモード（無数に存在する）

しかし、タキオンに関する話も本文書では完全に排除している。

このように限定的な話しかできなかったが、それでも「世界面上の理論のアノマリー相殺によって、ターゲット時空の構造が定まる」というアイディアは多少伝わったのではないかと思う。今回はボゾン弦理論であったが、**超弦理論の場合には世界面上のフェルミオンのアノマリー相殺から、「ターゲット時空がスピン構造 or ストリング構造を持たなければならない」**ことが明らかとなる。これに関しては和田氏の講演 [3] をぜひ参照してほしい。

最後に進んだトピックを少しだけ紹介しておきたい。例えば、本文書では閉弦だけを考えたが、開弦も考えると **D ブレーン**が登場する。D ブレーンは様々なアイディアの源泉となっている。さらに、弦の場の理論を考えると、**タキオン凝縮**という現象が起きることがわかる。これにより、D ブレーンの電荷が **K 理論**で分類されることがわかる。また、弦の場の理論では、**Batalin-Vilkovisky 形式**や**ホモトピー代数**が重要な地位を占めるが、これらは**因子化代数**による場の量子論の数学的定式化と重なる部分がある。また、超弦理論を勉強すると、非常に多彩なトピックに出会うことができる。実際、過去の RFCMP 研究会での浜中氏 [4]・立川氏 [5]・和田氏 [3]・菅野氏 [6] の講演は全て超弦理論の話題である。

弦理論には他にも様々なトピックがあり、列挙し始めたらキリがないが、兎に角も色々な面で非常に楽しい遊び場である。

## 参考文献

- [1] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (12, 2007), [10.1017/CBO9780511816079](https://doi.org/10.1017/CBO9780511816079).
- [2] 立川裕二, 量子重力の現状,  
<https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/transp/colloq.pdf>.
- [3] 和田博貴, *Topological Aspects of Worldsheet Theories*, .  
<https://www.youtube.com/watch?v=9MDhC4eKyvg>,<https://www.youtube.com/watch?v=D-CYP676BZA>
- [4] 浜中真志, *ADHM 構成法入門, ADHM 構成法の  $D$  ブレーン解釈*, .  
<https://www.youtube.com/watch?v=iSlKx8mIJzs>,<https://www.youtube.com/watch?v=1ug-Wihe9xs>
- [5] 立川裕二, *Anomaly cancellation in superstring theory: a review*, .  
<https://www.youtube.com/watch?v=K9ZWQPkibxk>,<https://youtu.be/rhHHrmUZW7s?si=xLSrYJOMRLhxwdd0>,<https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/lectures/2025-string-anomaly-cancellation/>
- [6] 菅野浩明, 位相的弦理論と *Gopakumar-Vafa* 不変量, .  
<https://www.youtube.com/watch?v=Hid495f25pE>,<https://www.youtube.com/watch?v=okUM6J5lPcY>,<https://indico.global/event/16468/contributions/147655/>