

ディラックCP位相に対する再位相不変公式と 一般的な摂動展開：DUNEおよびT2HKへの展望

[2507.04720](#), *Phys.Lett.B* 868 (2025) 139784

梁 正樹 @



CKMとMNS行列に対して CP位相そのものを抽出する公式

$$\delta = \arg \left[\frac{U_{e1}U_{e2}U_{\mu 3}U_{\tau 3}}{U_{e3} \det U_{\text{MNS}}} \right]$$

クォークレプトンの小さな混合で摂動展開し、一般的挙動を調べる

[2507.04720](#), *Phys.Lett.B* 868 (2025) 139784

梁 正樹 @



Leptonic CPVの現状

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad \text{MNS行列 (PDG表示)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Leptonic CPVの現状

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad \text{MNS行列 (PDG表示)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

複素位相 = CPの破れ

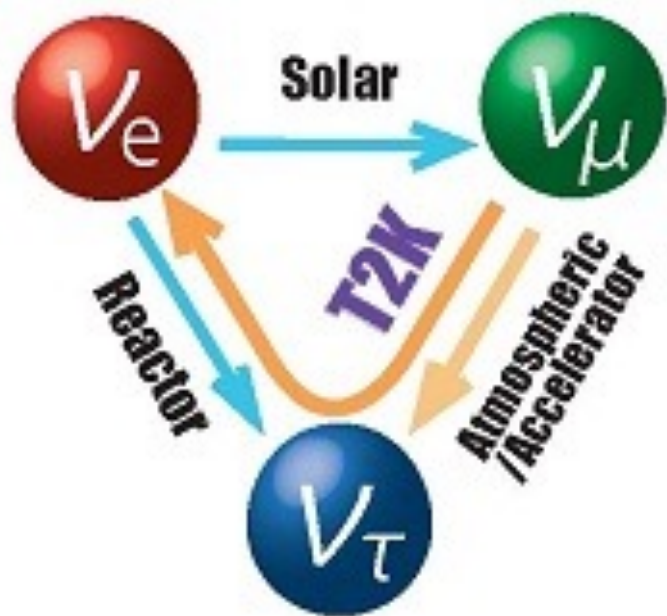
Leptonic CPVの現状

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad \text{MNS行列 (PDG表示)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

複素位相 = CPの破れ

T2K実験



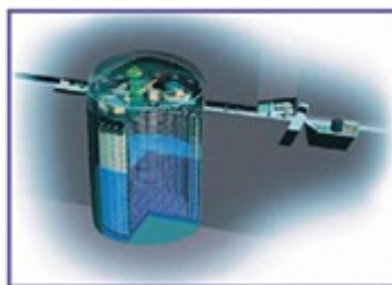
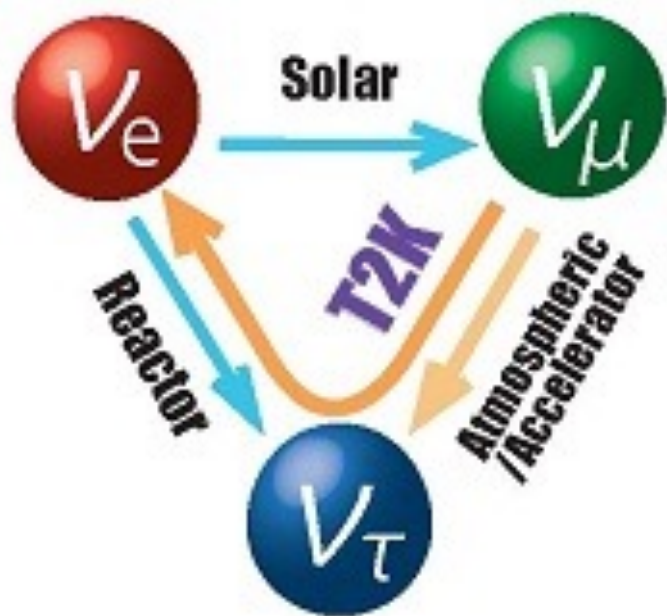
Leptonic CPVの現状

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad \text{MNS行列 (PDG表示)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

複素位相 = CPの破れ

T2K実験



Super-Kamiokande
(ICRR, Univ. Tokyo)



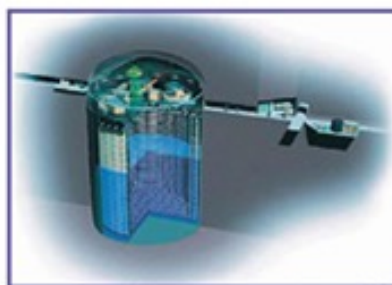
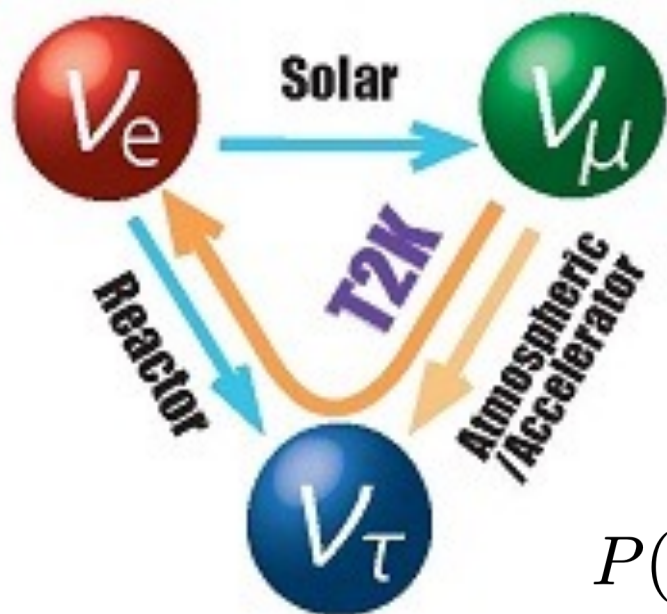
Leptonic CPVの現状

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad \text{MNS行列 (PDG表示)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

複素位相 = CPの破れ

T2K実験



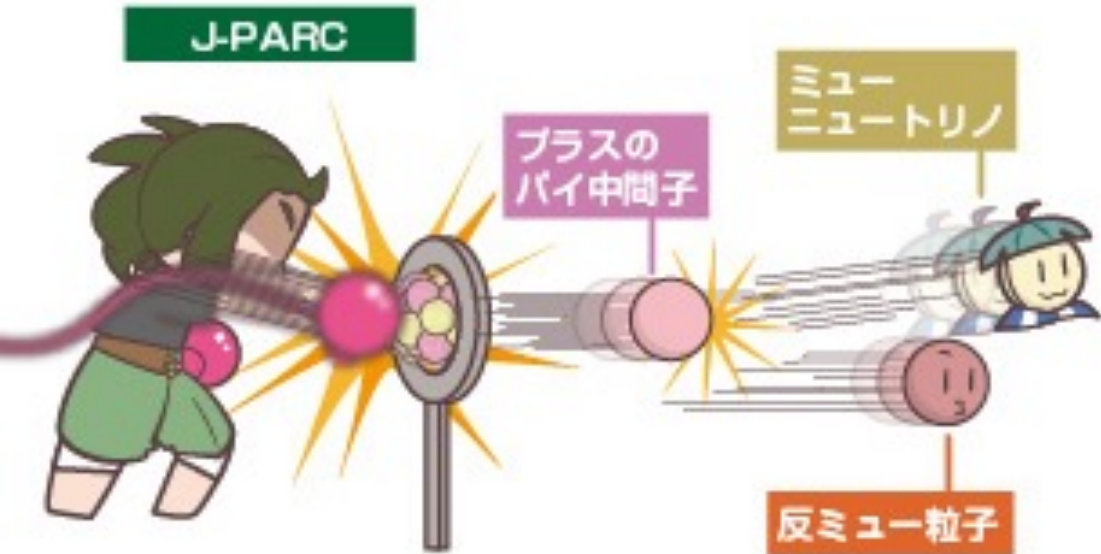
Super-Kamiokande
(ICRR, Univ. Tokyo)



$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ と $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ を比べることで Dirac 位相を測定

成果のゆるいまとめ

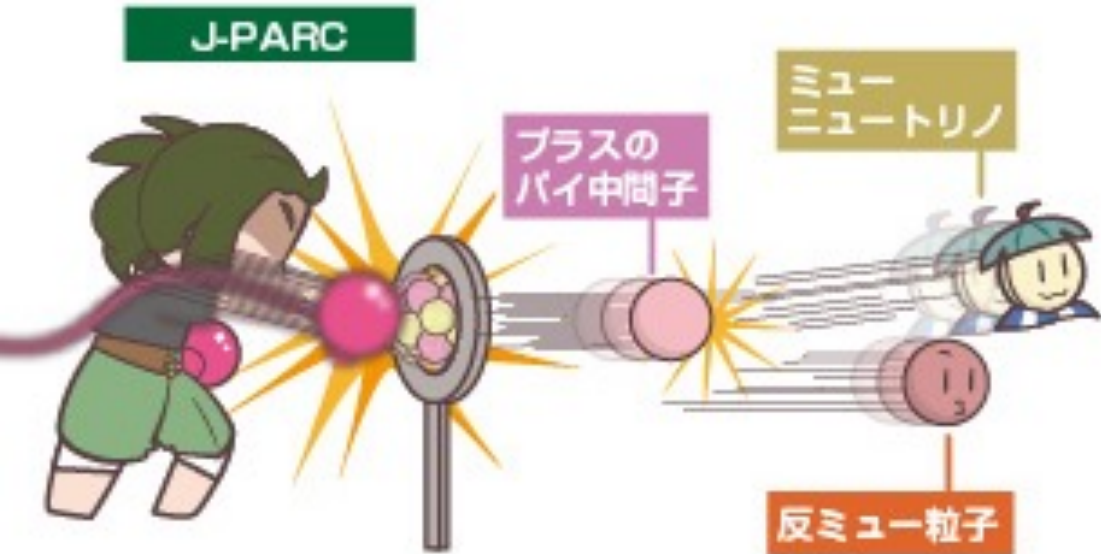
Higgstan.comより



陽子パンチを 1.49×10^{21} 回して
作った **ミューニュートリノ**

成果のゆるいまとめ

Higgstan.comより



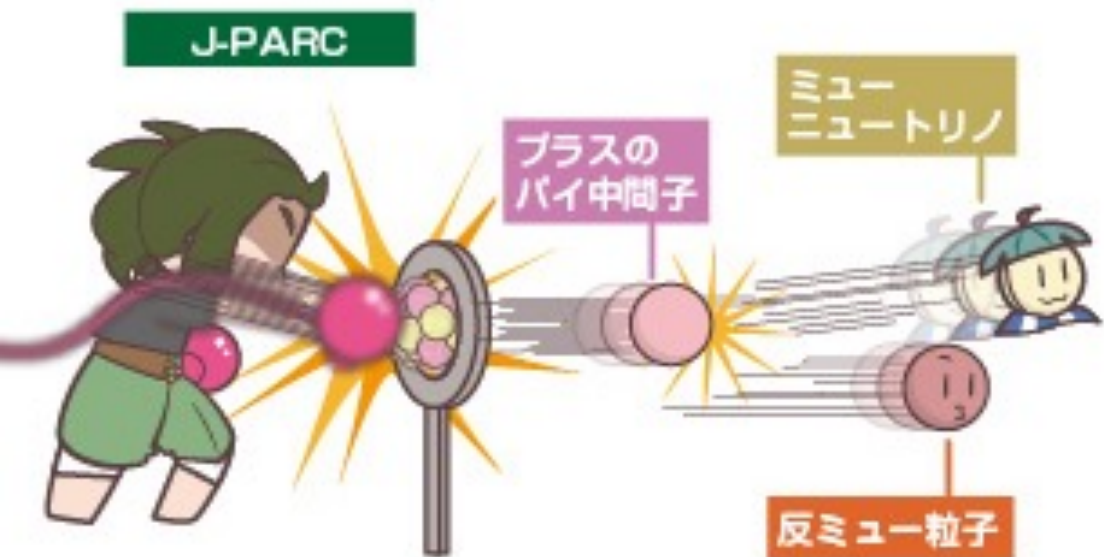
陽子パンチを 1.49×10^{21} 回して
作った **ミューニュートリノ**

ニュートリノ振動で一部が
電子ニュートリノ に変身



成果のゆるいまとめ

Higgstan.comより



陽子パンチを 1.49×10^{21} 回して
作った **ミューニュートリノ**

ニュートリノ振動で一部が
電子ニュートリノ に変身



スーパーカミオカンデ

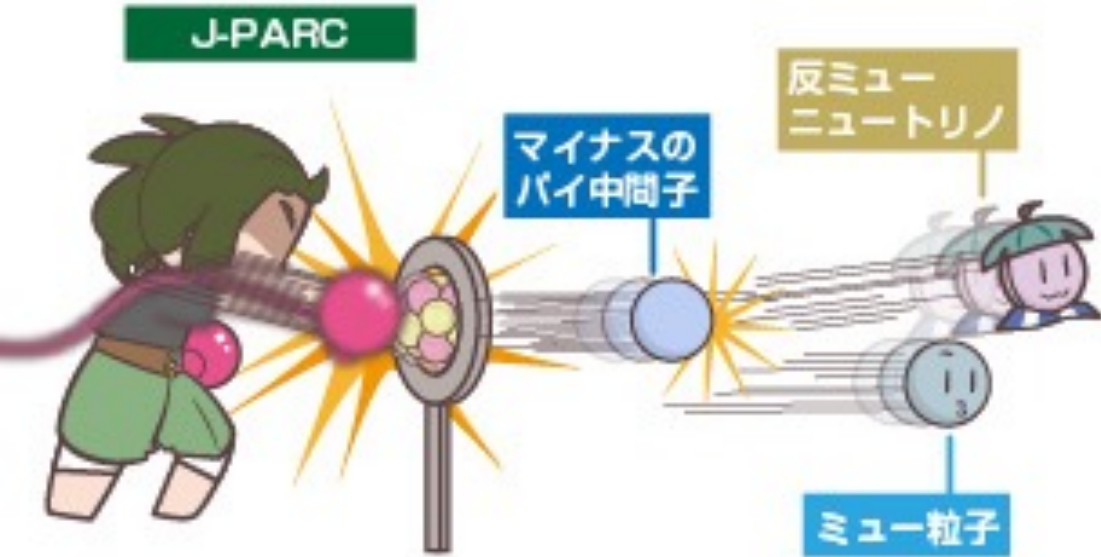


電子ニュートリノを
90個見つけた！

予想より多い！

成果のゆるいまとめ

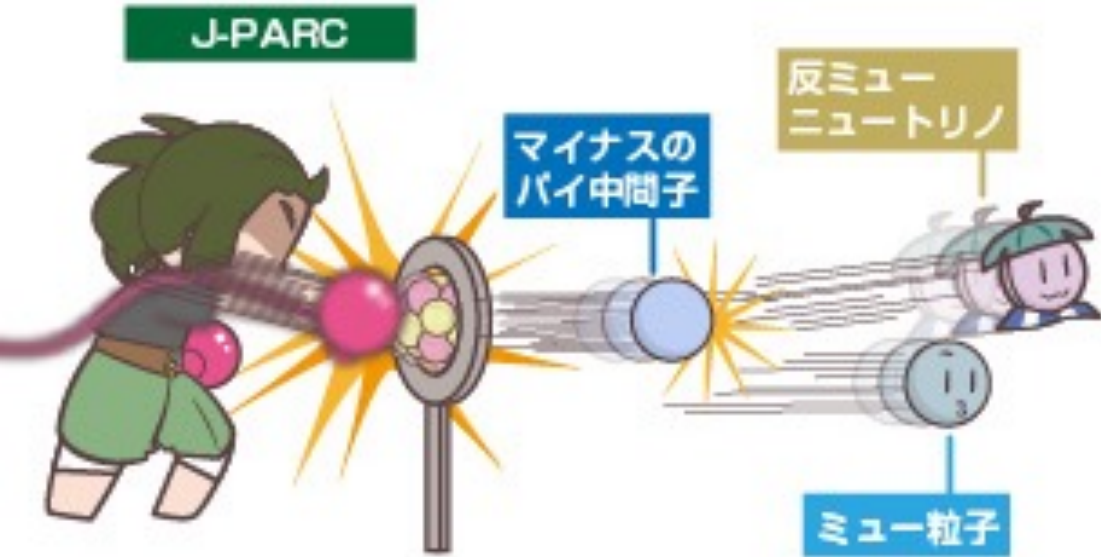
Higgstan.comより



陽子パンチを 1.64×10^{21} 回して
作った **反ミューニュートリノ**

成果のゆるいまとめ

Higgstan.comより



陽子パンチを 1.64×10^{21} 回して
作った **反ミューニュートリノ**

ニュートリノ振動で一部が
反電子ニュートリノ に変身



成果のゆるいまとめ

Higgstan.comより



陽子パンチを 1.64×10^{21} 回して
作った **反ミューニュートリノ**

ニュートリノ振動で一部が
反電子ニュートリノ に変身



スーパーカミオカンデ

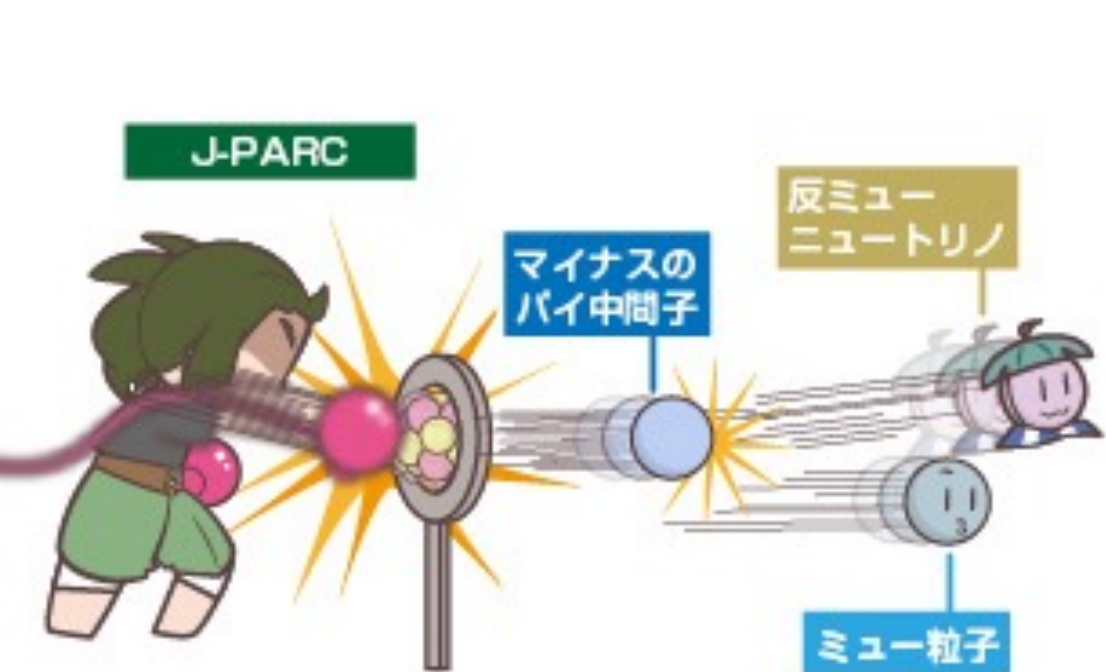


反電子ニュートリノを
15個見つけた！

(検出器が物質だったりするので もともと見つけにくいけど)
予想より少ない…

成果のゆるいまとめ

Higgstan.comより



陽子パンチを 1.64×10^{21} 回して
作った **反ミューニュートリノ**

ニュートリノ振動で一部が
反電子ニュートリノ に変身



スーパーカミオカンデ



反電子ニュートリノを
15個見つけた！

(検出器が物質だったりするので もともと見つけにくいけど)
予想より少ない…

「宇宙がなぜ物質ばかりなのか」のヒント？

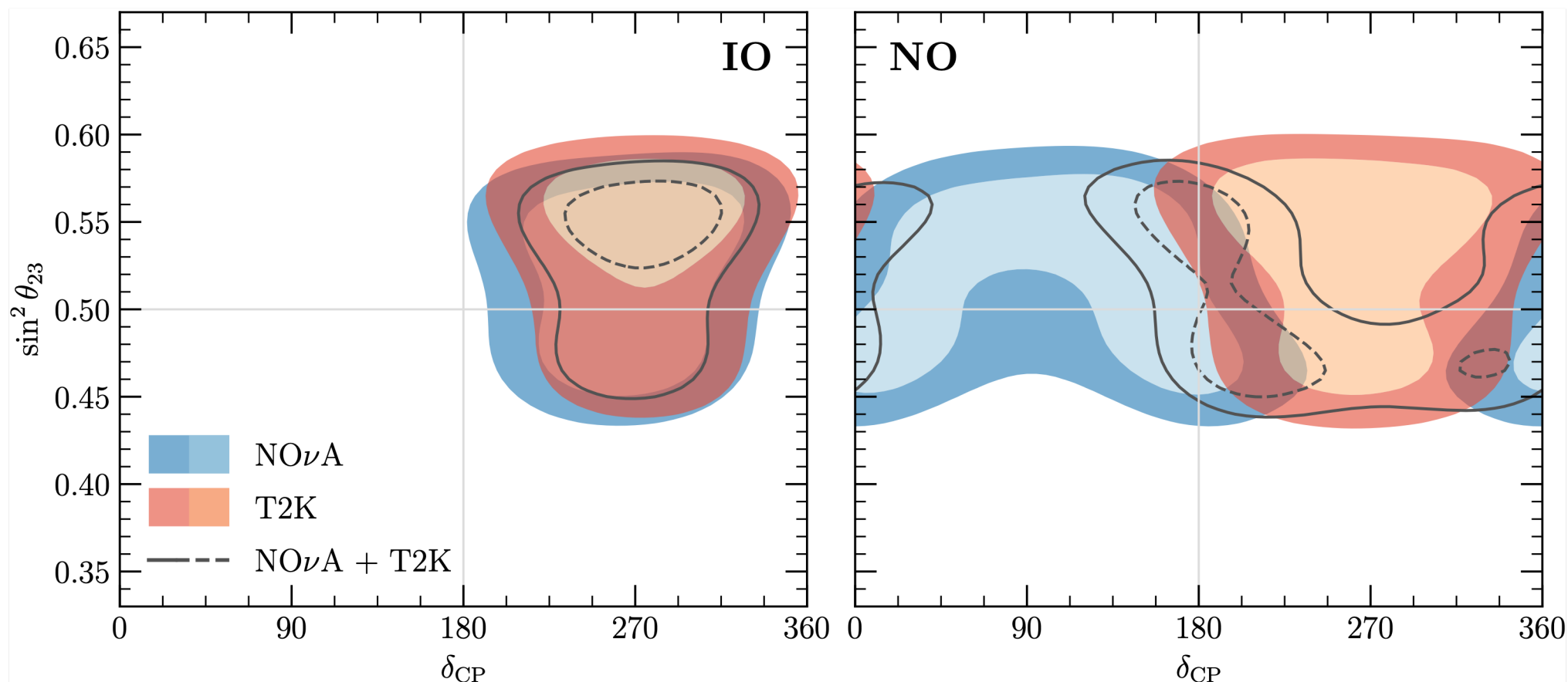


Figure 6. 1σ and 2σ allowed regions (2 dof) for T2K (red shading), NOvA (blue shading) and their combination (black curves). Contours are defined with respect to the local minimum for IO (left) or NO (right). We fix $\sin^2 \theta_{13} = 0.0222$, $\sin^2 \theta_{12} = 0.31$, $\Delta m_{21}^2 = 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ and minimize with respect to $|\Delta m_{3\ell}^2|$.

Leptonic CPVの現状

NuFit-6.0, 2410.05380

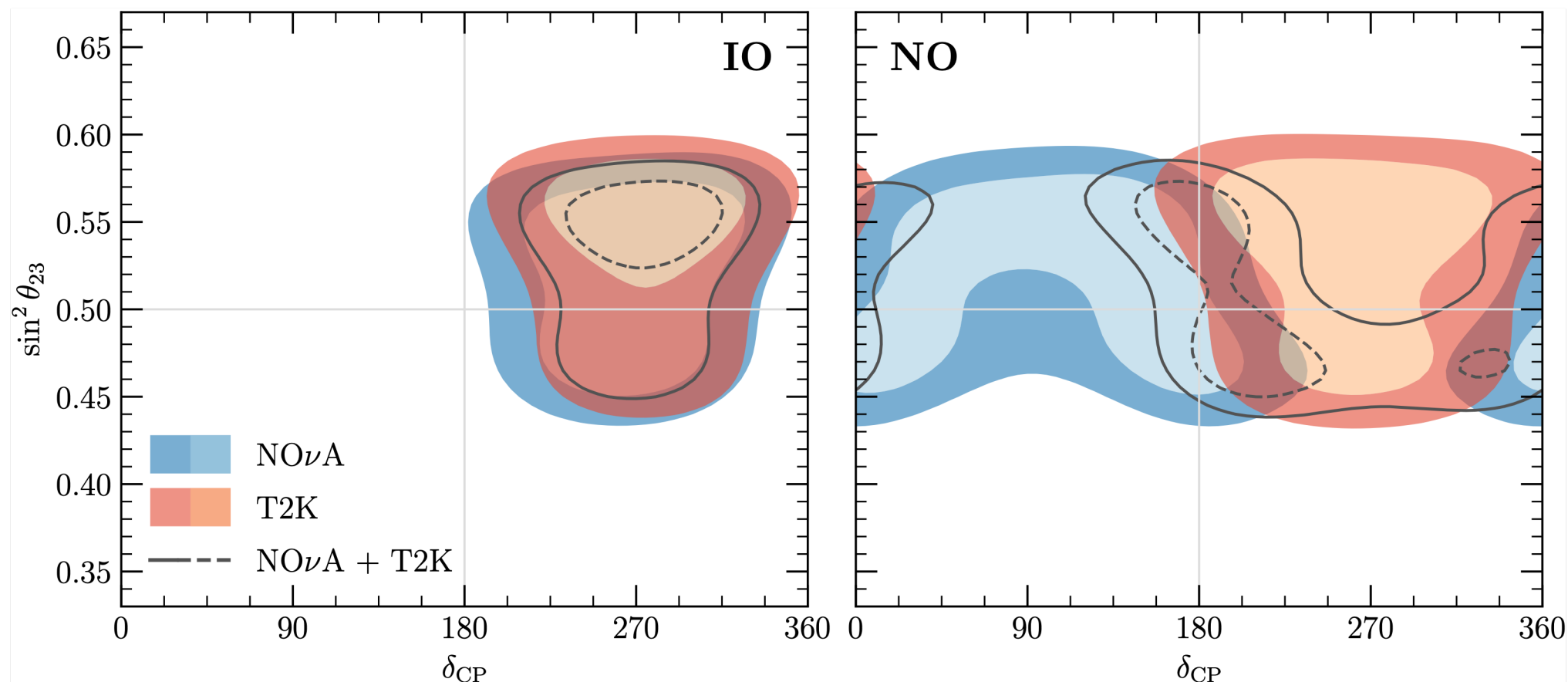
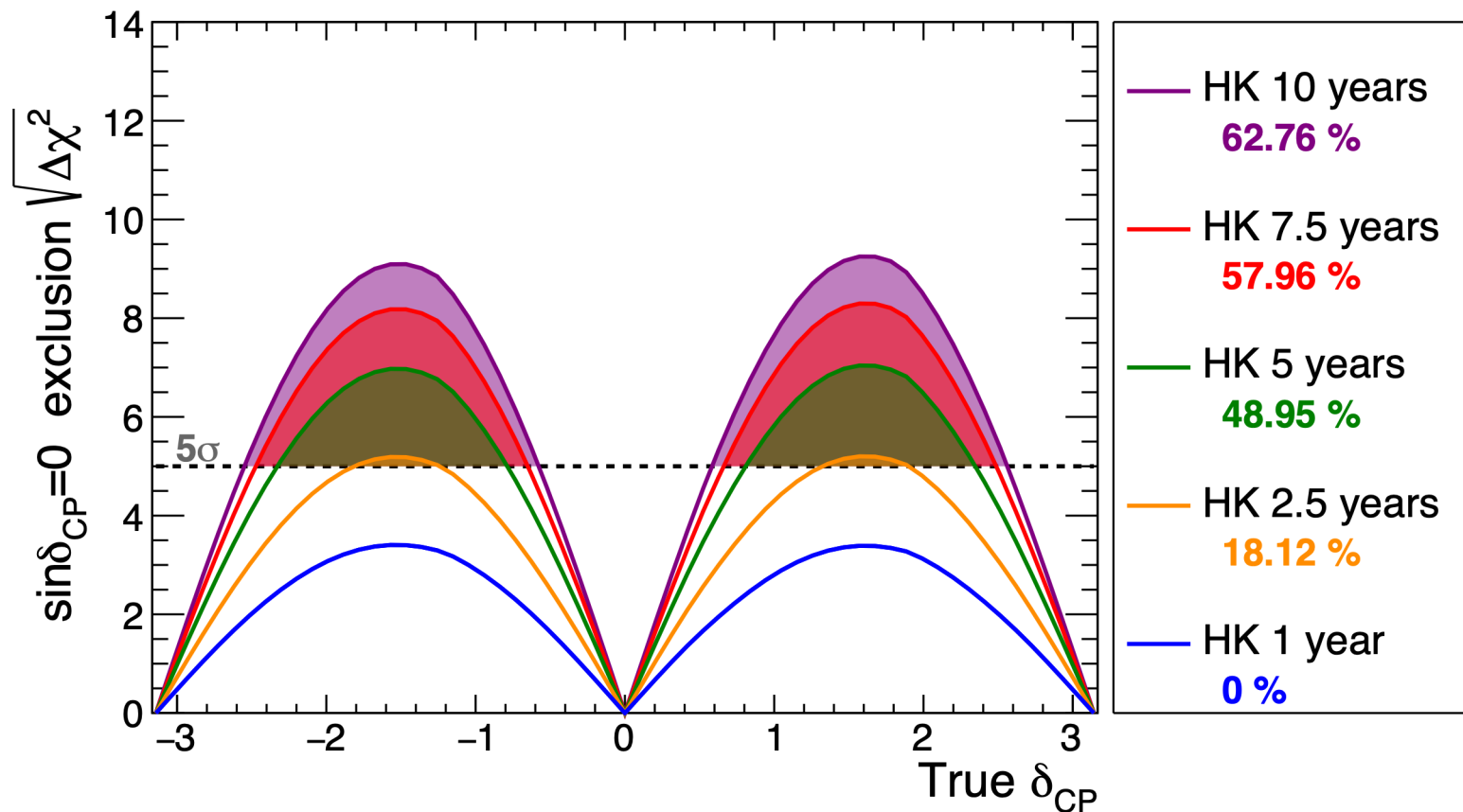


Figure 6. 1σ and 2σ allowed regions (2 dof) for T2K (red shading), NOvA (blue shading) and their

Dirac 位相 δ の値は、まだ良く分かっていない？

respect to $|\Delta m_{3\ell}^2|$.

HKが2028に運転開始(予定)、HK 1年～SK10年

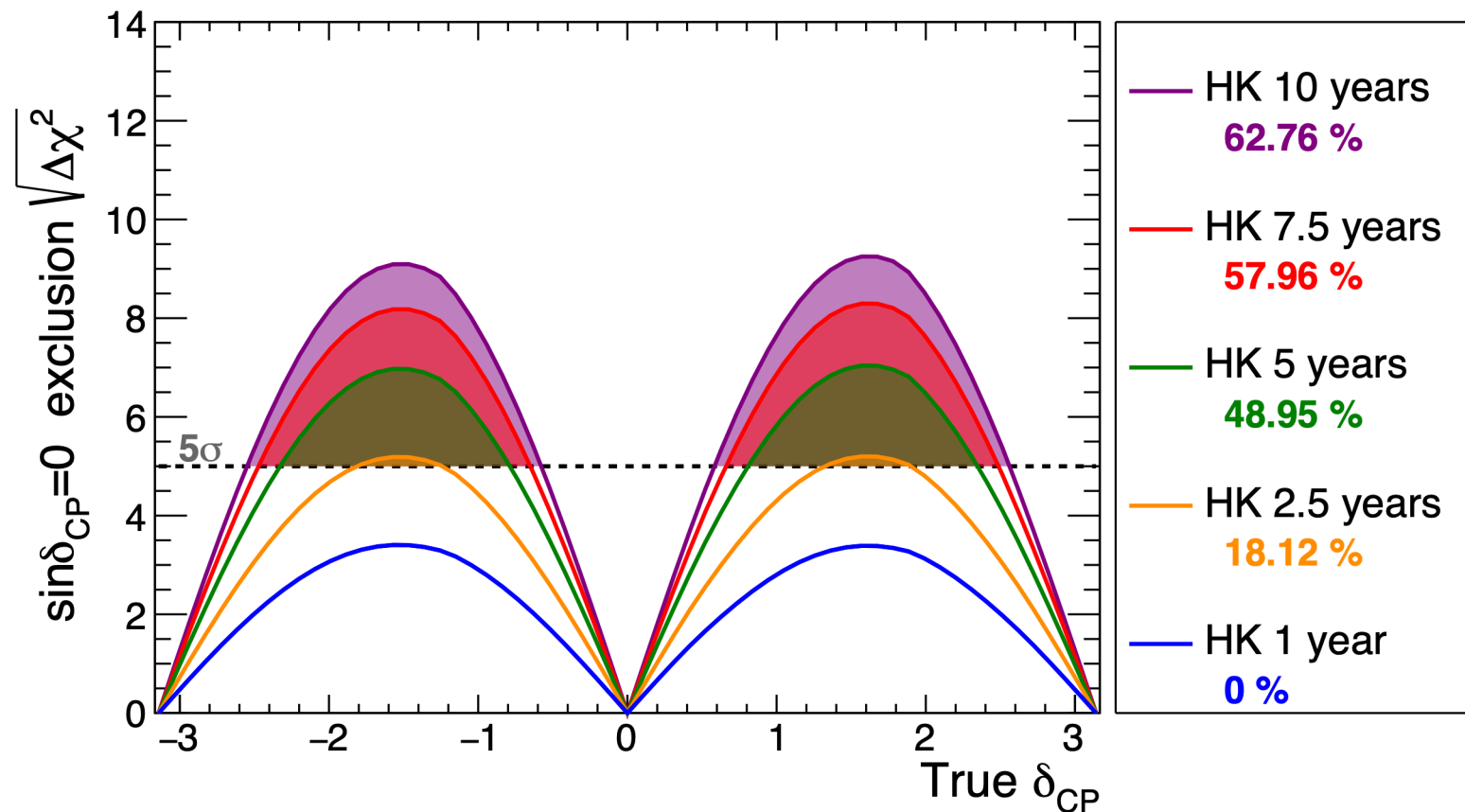


Hyper-K preliminary

True normal ordering (known), Improved systematics

$\sin^2 \theta_{13} = 0.0218 \pm 0.0007$, $\sin^2 \theta_{23} = 0.528$, $\Delta m_{32}^2 = 2.509 \times 10^{-3} \text{ eV}^2/c^4$

HKが2028に運転開始(予定)、HK 1年～SK10年



この観測的状況で、 δ に対する一般的理解が必要

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}|e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}| e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}|e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

$U_{13} = |U_{13}|e^{-i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}$ に着目すると、求めるべき位相 $e^{i\delta}$ は

$$U_{13}^* = |U_{13}|e^{i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}, \quad U_{13}^*e^{i(\gamma_{L1}-\gamma_{R3})} = |U_{13}|e^{i\delta},$$

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}|e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

$U_{13} = |U_{13}|e^{-i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}$ に着目すると、求めるべき位相 $e^{i\delta}$ は

$$U_{13}^* = |U_{13}|e^{i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}, \quad U_{13}^*e^{i(\gamma_{L1}-\gamma_{R3})} = |U_{13}|e^{i\delta},$$

$\det U = e^{i(\gamma_{L1}+\gamma_{L2}+\gamma_{L3}-\gamma_{R1}-\gamma_{R2}-\gamma_{R3})}$ と4つの位相を消去すると、

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}|e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

$U_{13} = |U_{13}|e^{-i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}$ に着目すると、求めるべき位相 $e^{i\delta}$ は

$$U_{13}^* = |U_{13}|e^{i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}, \quad U_{13}^*e^{i(\gamma_{L1}-\gamma_{R3})} = |U_{13}|e^{i\delta},$$

$\det U = e^{i(\gamma_{L1}+\gamma_{L2}+\gamma_{L3}-\gamma_{R1}-\gamma_{R2}-\gamma_{R3})}$ と4つの位相を消去すると、

$$\arg \left[\frac{U_{11}U_{12}U_{23}U_{33}}{\det U} \right] = \gamma_{L1} - \gamma_{R3}, \quad \Rightarrow \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11}U_{12}U_{23}U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$

PDG表示と再位相変換による位相公式

任意のユニタリ一行列は再位相変換でPDG表示にできる

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_{L2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_{L3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{11}| & |U_{12}| & |U_{13}|e^{-i\delta} \\ U_{21}^0 & U_{22}^0 & |U_{23}| \\ U_{31}^0 & U_{32}^0 & |U_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{R1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{R2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma_{R3}} \end{pmatrix}$$

$U_{13} = |U_{13}|e^{-i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}$ に着目すると、求めるべき位相 $e^{i\delta}$ は

$$U_{13}^* = |U_{13}|e^{i(\delta-\gamma_{L1}+\gamma_{R3})}, \quad U_{13}^*e^{i(\gamma_{L1}-\gamma_{R3})} = |U_{13}|e^{i\delta},$$

$\det U = e^{i(\gamma_{L1}+\gamma_{L2}+\gamma_{L3}-\gamma_{R1}-\gamma_{R2}-\gamma_{R3})}$ と4つの位相を消去すると、

$$\arg \left[\frac{U_{11}U_{12}U_{23}U_{33}}{\det U} \right] = \gamma_{L1} - \gamma_{R3}, \quad \Rightarrow \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11}U_{12}U_{23}U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$

行列式込みで再位相不変、基底に依存せず物理量に対応

Jとの等価性

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}}{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}} \left| \frac{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}}{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}} \right| = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*\det V_{\text{CKM}}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

ここで、 $\det V_{\text{CKM}} \det V_{\text{CKM}}^* = 1$ を用いた。 $V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*$ という形にするため
逆行列の公式 $V_{us}\det V_{\text{CKM}}^* = V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*$ より

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*(V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*)}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|} = \frac{|V_{cb}|^2V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^* - |V_{tb}|^2V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

両辺の虚部を取ると、右辺には Jarlskog invariant $J \equiv \text{Im} [V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*]$ が現れるが、
 $|V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 - |V_{ub}^2|$ より

Jとの等価性

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}}{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}} \left| \frac{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}}{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}} \right| = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*\det V_{\text{CKM}}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

ここで、 $\det V_{\text{CKM}} \det V_{\text{CKM}}^* = 1$ を用いた。 $V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*$ という形にするため
逆行列の公式 $V_{us}\det V_{\text{CKM}}^* = V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*$ より

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*(V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*)}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|} = \frac{|V_{cb}|^2V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^* - |V_{tb}|^2V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

両辺の虚部を取ると、右辺には Jarlskog invariant $J \equiv \text{Im} [V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*]$ が現れるが、
 $|V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 - |V_{ub}^2|$ より

$$\sin \arg \left[\frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}}{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}} \right] = \frac{1 - |V_{ub}^2|}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|} J = \sin \delta.$$

Jとの等価性

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}}{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}} \left| \frac{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}}{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}} \right| = \frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*\det V_{\text{CKM}}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

ここで、 $\det V_{\text{CKM}} \det V_{\text{CKM}}^* = 1$ を用いた。 $V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*$ という形にするため
逆行列の公式 $V_{us}\det V_{\text{CKM}}^* = V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*$ より

$$e^{i\delta} = \frac{V_{ud}V_{cb}V_{tb}V_{ub}^*(V_{cb}^*V_{td}^* - V_{cd}^*V_{tb}^*)}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|} = \frac{|V_{cb}|^2V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^* - |V_{tb}|^2V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^*}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|}.$$

両辺の虚部を取ると、右辺には Jarlskog invariant $J \equiv \text{Im}[V_{ud}V_{tb}V_{ub}^*V_{td}^*]$ が現れるが、
 $|V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 - |V_{ub}^2|$ より

$$\sin \arg \left[\frac{V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}}{V_{ub}\det V_{\text{CKM}}} \right] = \frac{1 - |V_{ub}^2|}{|V_{ud}V_{us}V_{cb}V_{tb}V_{ub}|} J = \sin \delta.$$

虚部がJarlskog 不変量と等価 + 実部が $\cos \delta$ の情報をもつ

Jarlskog不変量に対する利点

$$\begin{aligned} J &= \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^*] \\ &= s_{12} s_{13} s_{23} c_{12} c_{23} c_{13}^2 \sin \delta \end{aligned} \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11} U_{12} U_{23} U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$

Jarlskog不変量に対する利点

$$J = \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^*] \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11} U_{12} U_{23} U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$
$$= s_{12} s_{13} s_{23} c_{12} c_{23} c_{13}^2 \sin \delta$$

1. [因数分解可能性]

$\arg(ab) = \arg a + \arg b$ 、理論計算が簡明。
近似や誤差も評価しやすい

Jarlskog不変量に対する利点

$$J = \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^*] \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11} U_{12} U_{23} U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$
$$= s_{12} s_{13} s_{23} c_{12} c_{23} c_{13}^2 \sin \delta$$

1. [因数分解可能性]

$\arg(ab) = \arg a + \arg b$ 、理論計算が簡明。
近似や誤差も評価しやすい

2. [拘束条件の独立性]

この式は混合角から独立なので、拘束条件が絶対値と偏角に分離

Jarlskog不変量に対する利点

$$J = \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^*] \quad \delta = \arg \left[\frac{U_{11} U_{12} U_{23} U_{33}}{U_{13} \det U} \right]$$
$$= s_{12} s_{13} s_{23} c_{12} c_{23} c_{13}^2 \sin \delta$$

1. [因数分解可能性]

$\arg(ab) = \arg a + \arg b$ 、理論計算が簡明。
近似や誤差も評価しやすい

2. [拘束条件の独立性]

この式は混合角から独立なので、拘束条件が絶対値と偏角に分離

3. [表記の簡便性]

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad : \quad a + b$$

摂動展開

荷電レプトン側を小混合として摂動展開し、一般的な振る舞いを調べる

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu \quad U_e^1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^e e^{-i\rho_{12}} & s_{13}^e e^{-i\rho_{13}} \\ -s_{12}^e e^{i\rho_{12}} & 1 & s_{23}^e e^{-i\rho_{23}} \\ -s_{13}^e e^{i\rho_{13}} & -s_{23}^e e^{i\rho_{23}} & 1 \end{pmatrix},$$

摂動展開

荷電レプトン側を小混合として摂動展開し、一般的な振る舞いを調べる

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu, \quad U_e^1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^e e^{-i\rho_{12}} & s_{13}^e e^{-i\rho_{13}} \\ -s_{12}^e e^{i\rho_{12}} & 1 & s_{23}^e e^{-i\rho_{23}} \\ -s_{13}^e e^{i\rho_{13}} & -s_{23}^e e^{i\rho_{23}} & 1 \end{pmatrix},$$

計算（1 ページくらい）の結果

$$\delta \simeq \delta_\nu + 2s_{23}^e \sin \rho_{23} + 5s_{12}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + 5s_{13}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{13}).$$

摂動展開

荷電レプトン側を小混合として摂動展開し、一般的な振る舞いを調べる

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu, \quad U_e^1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^e e^{-i\rho_{12}} & s_{13}^e e^{-i\rho_{13}} \\ -s_{12}^e e^{i\rho_{12}} & 1 & s_{23}^e e^{-i\rho_{23}} \\ -s_{13}^e e^{i\rho_{13}} & -s_{23}^e e^{i\rho_{23}} & 1 \end{pmatrix},$$

計算（1 ページくらい）の結果

$$\delta \simeq \delta_\nu + 2s_{23}^e \sin \rho_{23} + 5s_{12}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + 5s_{13}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{13}).$$

0.1程度以下の混合角 s_{ij} に対して、CP位相への影響は $0.2 \sim 10^\circ$, $0.5 \sim 30^\circ$ 程度

摂動展開

荷電レプトン側を小混合として摂動展開し、一般的な振る舞いを調べる

$$U_{\text{MNS}} = U_e^\dagger U_\nu, \quad U_e^1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & s_{12}^e e^{-i\rho_{12}} & s_{13}^e e^{-i\rho_{13}} \\ -s_{12}^e e^{i\rho_{12}} & 1 & s_{23}^e e^{-i\rho_{23}} \\ -s_{13}^e e^{i\rho_{13}} & -s_{23}^e e^{i\rho_{23}} & 1 \end{pmatrix},$$

計算（1 ページくらい）の結果

$$\delta \simeq \delta_\nu + 2s_{23}^e \sin \rho_{23} + 5s_{12}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + 5s_{13}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{13}).$$

0.1程度以下の混合角 s_{ij} に対して、CP位相への影響は $0.2 \sim 10^\circ$ ， $0.5 \sim 30^\circ$ 程度
HK10年の観測で $O(10^\circ)$ の解像度なので、これらの位相は観測に影響

小林益川表示のCP位相に対する位相不変公式

[2508.10249](https://arxiv.org/abs/2508.10249) Published in PTEP
doi.org/10.1093/ptep/ptaf186

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[- \frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right]$$

一般的な摂動展開によって背後の物理や大統一理論を探索

KM表示

Kobayashi, Maskawa, '73, PTP

PDGとは異なるオリジナルの表示

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{\text{KM}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & s_3 & -c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

KM表示

Kobayashi, Maskawa, '73, PTP

PDGとは異なるオリジナルの表示

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{\text{KM}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & s_3 & -c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta_{\text{KM}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

CP位相の構造

$$\arg \det V_{\text{CKM}}^1 = \delta_{\text{KM}} + \pi.$$

$$\arg V_{ud}^1 = \arg(-V_{us}^1) = \arg(-V_{ub}^1) = \arg V_{cd}^1 = \arg V_{td}^1 = 0,$$

KM表示

Kobayashi, Maskawa, '73, PTP

おなじような議論で

$$\arg \det V_{\text{CKM}} = \delta_{\text{KM}} + \pi + \sum_i (\gamma_{Li} - \gamma_{Ri}) ,$$

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \det V_{\text{CKM}} - \pi - (\gamma_{L1} + \gamma_{L2} + \gamma_{L3} - \gamma_{R1} - \gamma_{R2} - \gamma_{R3})$$

$$= \arg \det V_{\text{CKM}} - \arg(-V_{us}V_{ub}V_{cd}V_{td}/V_{ud}) = \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us}V_{ub}V_{cd}V_{td}} \right] .$$

CP位相の構造

$$\arg \det V_{\text{CKM}}^1 = \delta_{\text{KM}} + \pi .$$

$$\arg V_{ud}^1 = \arg(-V_{us}^1) = \arg(-V_{ub}^1) = \arg V_{cd}^1 = \arg V_{td}^1 = 0 ,$$

KM表示

Kobayashi, Maskawa, '73, PTP

おんなじような議論で

$$\arg \det V_{\text{CKM}} = \delta_{\text{KM}} + \pi + \sum_i (\gamma_{Li} - \gamma_{Ri}) ,$$

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \det V_{\text{CKM}} - \pi - (\gamma_{L1} + \gamma_{L2} + \gamma_{L3} - \gamma_{R1} - \gamma_{R2} - \gamma_{R3})$$

$$= \arg \det V_{\text{CKM}} - \arg(-V_{us}V_{ub}V_{cd}V_{td}/V_{ud}) = \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us}V_{ub}V_{cd}V_{td}} \right] .$$

半世紀年以上、誰もこの連立式を解いてない！！

CP位相の構造

$$\arg \det V_{\text{CKM}}^1 = \delta_{\text{KM}} + \pi .$$

$$\arg V_{ud}^1 = \arg(-V_{us}^1) = \arg(-V_{ub}^1) = \arg V_{cd}^1 = \arg V_{td}^1 = 0 ,$$

KM表示

UTfit, M. Bona et al., Rend. Lincei Sci. Fis. Nat. 34, 37 (2023), arXiv:2212.03894.

最新のUT fitより、

$$\begin{aligned}\sin \theta_{12} &= 0.22519 \pm 0.00083, & \sin \theta_{23} &= 0.04200 \pm 0.00047, \\ \sin \theta_{13} &= 0.003714 \pm 0.000092, & \delta &= 1.137 \pm 0.022 = 65.15^\circ \pm 1.3^\circ.\end{aligned}$$

KM表示

UTfit, M. Bona et al., Rend. Lincei Sci. Fis. Nat. 34, 37 (2023), arXiv:2212.03894.

最新のUT fitより、

$$\begin{aligned}\sin \theta_{12} &= 0.22519 \pm 0.00083, & \sin \theta_{23} &= 0.04200 \pm 0.00047, \\ \sin \theta_{13} &= 0.003714 \pm 0.000092, & \delta &= 1.137 \pm 0.022 = 65.15^\circ \pm 1.3^\circ.\end{aligned}$$

この位相はほぼ $\pi/2$ (**ほとんど $\pi - \alpha$ に等しい**)

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud}^0 \det V_{\text{CKM}}^0}{V_{us}^0 V_{ub}^0 V_{cd}^0 V_{td}^0} \right] = 87.56^\circ, \quad \cos \delta_{\text{KM}} = 0.0425.$$

KM表示

UTfit, M. Bona et al., Rend. Lincei Sci. Fis. Nat. 34, 37 (2023), arXiv:2212.03894.

最新のUT fitより、

$$\begin{aligned}\sin \theta_{12} &= 0.22519 \pm 0.00083, & \sin \theta_{23} &= 0.04200 \pm 0.00047, \\ \sin \theta_{13} &= 0.003714 \pm 0.000092, & \delta &= 1.137 \pm 0.022 = 65.15^\circ \pm 1.3^\circ.\end{aligned}$$

この位相はほぼ $\pi/2$ (**ほとんど $\pi - \alpha$ に等しい**)

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud}^0 \det V_{\text{CKM}}^0}{V_{us}^0 V_{ub}^0 V_{cd}^0 V_{td}^0} \right] = 87.56^\circ, \quad \cos \delta_{\text{KM}} = 0.0425.$$

行列要素から求めたものと一致

$$\cos \delta_{\text{KM}} = \frac{|V_{ud}^0 V_{us}^0 V_{cd}^0|^2 + |V_{ub}^0 V_{td}^0|^2 - |V_{cs}^0|^2 (1 - |V_{ud}^0|^2)^2}{2|V_{ud}^0 V_{us}^0 V_{cd}^0 V_{ub}^0 V_{td}^0|} = 0.0425.$$

KM表示

UTfit, M. Bona et al., Rend. Lincei Sci. Fis. Nat. 34, 37 (2023), arXiv:2212.03894.

最新のUT fitより、

$$\begin{aligned}\sin \theta_{12} &= 0.22519 \pm 0.00083, & \sin \theta_{23} &= 0.04200 \pm 0.00047, \\ \sin \theta_{13} &= 0.003714 \pm 0.000092, & \delta &= 1.137 \pm 0.022 = 65.15^\circ \pm 1.3^\circ.\end{aligned}$$

この位相はほぼ $\pi/2$ (ほとんど $\pi - \alpha$ に等しい)

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud}^0 \det V_{\text{CKM}}^0}{V_{us}^0 V_{ub}^0 V_{cd}^0 V_{td}^0} \right] = 87.56^\circ, \quad \cos \delta_{\text{KM}} = 0.0425.$$

行列要素から求めたものと一致

$$\cos \delta_{\text{KM}} = \frac{|V_{ud}^0 V_{us}^0 V_{cd}^0|^2 + |V_{ub}^0 V_{td}^0|^2 - |V_{cs}^0|^2 (1 - |V_{ud}^0|^2)^2}{2|V_{ud}^0 V_{us}^0 V_{cd}^0 V_{ub}^0 V_{td}^0|} = 0.0425.$$

現象論的にここから何がわかる???

摂動展開

一般的な小混合と位相に対し、 λ^3 まで展開

$$U_{u,d}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23}^{u,d} & s_{23}^{u,d} e^{-i\rho_{23}^{u,d}} \\ 0 & -s_{23}^{u,d} e^{i\rho_{23}^{u,d}} & c_{23}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13}^{u,d} & 0 & s_{13}^{u,d} e^{-i\rho_{13}^{u,d}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}^{u,d} e^{i\rho_{13}^{u,d}} & 0 & c_{13}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}^{u,d} & s_{12}^{u,d} e^{-i\rho_{12}^{u,d}} & 0 \\ -s_{12}^{u,d} e^{i\rho_{12}^{u,d}} & c_{12}^{u,d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg [+V_{ub}^*/V_{td}] + O(\lambda^2),$$

摂動展開

一般的な小混合と位相に対し、 λ^3 まで展開

$$U_{u,d}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23}^{u,d} & s_{23}^{u,d} e^{-i\rho_{23}^{u,d}} \\ 0 & -s_{23}^{u,d} e^{i\rho_{23}^{u,d}} & c_{23}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13}^{u,d} & 0 & s_{13}^{u,d} e^{-i\rho_{13}^{u,d}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}^{u,d} e^{i\rho_{13}^{u,d}} & 0 & c_{13}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}^{u,d} & s_{12}^{u,d} e^{-i\rho_{12}^{u,d}} & 0 \\ -s_{12}^{u,d} e^{i\rho_{12}^{u,d}} & c_{12}^{u,d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg [+V_{ub}^*/V_{td}] + O(\lambda^2),$$

up-type, down-typeの13混合が十分小さければ

$$|V_{ub}/V_{td}| e^{i\delta_{\text{KM}}} \simeq -\frac{s_{12}^d}{s_{12}^u} e^{i(\rho_{12}^u - \rho_{12}^d)} + O(\lambda^2).$$

摂動展開

一般的な小混合と位相に対し、 λ^3 まで展開

$$U_{u,d}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23}^{u,d} & s_{23}^{u,d} e^{-i\rho_{23}^{u,d}} \\ 0 & -s_{23}^{u,d} e^{i\rho_{23}^{u,d}} & c_{23}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13}^{u,d} & 0 & s_{13}^{u,d} e^{-i\rho_{13}^{u,d}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}^{u,d} e^{i\rho_{13}^{u,d}} & 0 & c_{13}^{u,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}^{u,d} & s_{12}^{u,d} e^{-i\rho_{12}^{u,d}} & 0 \\ -s_{12}^{u,d} e^{i\rho_{12}^{u,d}} & c_{12}^{u,d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{\text{KM}} = \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg [+V_{ub}^*/V_{td}] + O(\lambda^2),$$

up-type, down-typeの13混合が十分小さければ

$$|V_{ub}/V_{td}| e^{i\delta_{\text{KM}}} \simeq -\frac{s_{12}^d}{s_{12}^u} e^{i(\rho_{12}^u - \rho_{12}^d)} + O(\lambda^2).$$

$\Rightarrow$ 12混合の位相差がほぼ最大 (理論的によく知られた結果)

大統一理論？（気分）

クォーク

$$|V_{ub}/V_{td}| e^{i\delta_{\text{KM}}} \simeq -\frac{s_{12}^d}{s_{12}^u} e^{i(\rho_{12}^u - \rho_{12}^d)} + O(\lambda^2).$$

レプトン

$$\simeq \delta_\nu + 2s_{23}^e \sin \rho_{23} + 5s_{12}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + 5s_{13}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{13}).$$

大統一理論？（気分）

クォーク

$$|V_{ub}/V_{td}| e^{i\delta_{\text{KM}}} \simeq -\frac{s_{12}^d}{s_{12}^u} e^{i(\rho_{12}^u - \rho_{12}^d)} + O(\lambda^2).$$

レプトン

$$\simeq \delta_\nu + 2s_{23}^e \sin \rho_{23} + 5s_{12}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + 5s_{13}^e \sin(\delta_\nu - \rho_{13}).$$

ρ_{12} が大きく、他との相殺がなければ、
レプトンのCP位相($\sim 30^\circ$)が10年以内に見つかるべき？

未来予想図(ざっくり)



t	$ \sin \delta $	
2028		HK始動
2031	1.0	$\mu - \tau$ reflection symmetry +摂動
2033	0.7	ref.sym+摂動はこのへんまで
2039	0.5	荷電レプトンの位相がより重要

まとめ

1. PDG表示のCP位相とMNS行列

$$\delta_{\text{PDG}} = \arg [U_{e1}U_{e2}U_{\mu 3}U_{\tau 3}/U_{e3} \det U_{\text{MNS}}]$$

- $\det U_{\text{MNS}}$ の変換も入れると再位相不変で、PDG表示では明らかに δ に一致
- **荷電レプトン側の摂動は 10° を超えるのでHKの観測に影響**

2. KM表示のCP位相とCKM行列

$$\delta_{\text{KM}} = \arg [-V_{ud} \det V_{\text{CKM}}/V_{us}V_{ub}V_{cd}V_{td}]$$

- これはほぼ 90° で、13混合が小さければ**up-downの12混合の位相差が最大**

3. 大統一理論、宇宙論や新たな位相不変量の展開に有用

Back ups

実際の計算(レプトン)

$$\begin{aligned}
 \arg U_{e1} &\simeq s_{12}^e \frac{c_{12}^\nu s_{13}^\nu s_{23}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) - c_{23}^\nu s_{12}^\nu \sin \rho_{12}}{c_{12}^\nu c_{13}^\nu} + s_{13}^e \frac{c_{12}^\nu c_{23}^\nu s_{13}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{13}) + s_{12}^\nu s_{23}^\nu \sin \rho_{13}}{c_{12}^\nu c_{13}^\nu}, \\
 \arg U_{e2} &\simeq s_{12}^e \frac{s_{12}^\nu s_{13}^\nu s_{23}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + c_{12}^\nu c_{23}^\nu \sin \rho_{12}}{c_{13}^\nu s_{12}^\nu} + s_{13}^e \frac{c_{23}^\nu s_{12}^\nu s_{13}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{13}) - c_{12}^\nu s_{23}^\nu \sin \rho_{13}}{c_{13}^\nu s_{12}^\nu}, \\
 \arg U_{\mu 3} &\simeq s_{23}^e \frac{c_{23}^\nu \sin \rho_{23}}{s_{23}^\nu} - s_{12}^e \frac{s_{13}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{12})}{c_{13}^\nu s_{23}^\nu}, \quad \arg U_{\tau 3} \simeq s_{23}^e \frac{s_{23}^\nu \sin \rho_{23}}{c_{23}^\nu} - s_{13}^e \frac{s_{13}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{13})}{c_{13}^\nu c_{23}^\nu}, \\
 \arg U_{e3} &\simeq -\delta_\nu - s_{13}^e \frac{c_{13}^\nu c_{23}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{13})}{s_{13}^\nu} - s_{12}^e \frac{c_{13}^\nu s_{23}^\nu \sin(\delta_\nu - \rho_{12})}{s_{13}^\nu}.
 \end{aligned}$$

h contribution vanishes in the limit $s_{ij}^e \rightarrow 0$, the CP phases ρ_{ij} appear at first order in the corresponding case, with $\arg(\det U_{\text{MNS}}) = 0$, the Dirac phase δ is expanded as

$$\delta \simeq \delta_\nu + s_{12}^e D_{12} + s_{13}^e D_{13} + s_{23}^e \frac{\sin \rho_{23}}{c_{23}^\nu s_{23}^\nu},$$

ie coefficients D_{12} and D_{13} are given by

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= \frac{(c_{13}^\nu)^2 (s_{23}^\nu)^2 + (2(s_{23}^\nu)^2 - 1) (s_{13}^\nu)^2}{s_{13}^\nu s_{23}^\nu c_{13}^\nu} \sin(\delta_\nu - \rho_{12}) + \frac{(c_{12}^\nu)^2 - (s_{12}^\nu)^2}{c_{12}^\nu s_{12}^\nu c_{13}^\nu} c_{23}^\nu \sin \rho_{12}, \\
 D_{13} &= \frac{(c_{13}^\nu)^2 (c_{23}^\nu)^2 + (2(c_{23}^\nu)^2 - 1) (s_{13}^\nu)^2}{s_{13}^\nu c_{23}^\nu c_{13}^\nu} \sin(\delta_\nu - \rho_{13}) - \frac{(c_{12}^\nu)^2 - (s_{12}^\nu)^2}{c_{12}^\nu s_{12}^\nu c_{13}^\nu} s_{23}^\nu \sin \rho_{13}.
 \end{aligned}$$

実際の計算(クォーク)

$$\arg V_{ud} \simeq 0 + O(\lambda^2),$$

$$\arg V_{us} \simeq \arg \left[s_{12}^d e^{-i\rho_{12}^d} - s_{12}^u e^{-i\rho_{12}^u} \right] + O(\lambda^2), \quad \arg V_{cd} \simeq \arg(-V_{us}^*) + O(\lambda^2),$$

$$\arg V_{ub} \simeq \arg \left[s_{13}^d e^{-i\rho_{13}^d} - s_{13}^u e^{-i\rho_{13}^u} - s_{12}^u e^{-i\rho_{12}^u} (s_{23}^d e^{-i\rho_{23}^d} - s_{23}^u e^{-i\rho_{23}^u}) \right] + O(\lambda^2),$$

$$\arg V_{td} \simeq \arg \left[-s_{13}^d e^{i\rho_{13}^d} + s_{13}^u e^{i\rho_{13}^u} + s_{12}^d e^{i\rho_{12}^d} (s_{23}^d e^{i\rho_{23}^d} - s_{23}^u e^{i\rho_{23}^u}) \right] + O(\lambda^2).$$

$$|V_{ub}/V_{td}| e^{i\delta_{\text{KM}}} = -\frac{s_{13}^d e^{i\rho_{13}^d} - s_{13}^u e^{i\rho_{13}^u} - s_{12}^u e^{i\rho_{12}^u} (s_{23}^d e^{i\rho_{23}^d} - s_{23}^u e^{i\rho_{23}^u})}{s_{13}^d e^{i\rho_{13}^d} - s_{13}^u e^{i\rho_{13}^u} - s_{12}^d e^{i\rho_{12}^d} (s_{23}^d e^{i\rho_{23}^d} - s_{23}^u e^{i\rho_{23}^u})} + O(\lambda^2).$$

摂動展開(PDG表示のCKM行列)

一般的な小混合と位相に対し、 λ^3 まで展開

$$\delta = \arg[V_{us}V_{cb}/V_{ub}] + O(\lambda^2),$$

$$\left| \frac{V_{us}}{V_{ub}/V_{cb}} \right| e^{i\delta} = \frac{s_{12}^d e^{-i\rho_{12}^d} - s_{12}^u e^{-i\rho_{12}^u}}{\frac{s_{13}^d e^{-i\rho_{13}^d} - s_{13}^u e^{-i\rho_{13}^u}}{s_{23}^d e^{-i\rho_{23}^d} - s_{23}^u e^{-i\rho_{23}^u}} - s_{12}^u e^{-i\rho_{12}^u}} + O(\lambda^2).$$

13混合が十分小さければ

$$\delta \simeq \arg \left[1 - \frac{s_{12}^d}{s_{12}^u} e^{i(\rho_{12}^u - \rho_{12}^d)} \right] + O(\lambda^2).$$

$\Rightarrow$ 12混合の位相がすごく大きい？

ユニタリティ三角形と和則

2つの位相の和

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{us} V_{cb} V_{tb}}{V_{ub} \det V_{\text{CKM}}} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right],$$

ユニタリティ三角形と和則

2つの位相の和

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{us} V_{cb} V_{tb}}{V_{ub} \det V_{\text{CKM}}} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right],$$

これは

$$\arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} V_{cb}}{V_{ub} V_{cd}} \right] = \pi - \alpha + \gamma = 2\gamma + \beta,$$

ユニタリティ三角形と和則

2つの位相の和

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{us} V_{cb} V_{tb}}{V_{ub} \det V_{\text{CKM}}} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right],$$

これは

$$\arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} V_{cb}}{V_{ub} V_{cd}} \right] = \pi - \alpha + \gamma = 2\gamma + \beta,$$

数値的確認 (厳密式)

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = 65.15^\circ + 87.56^\circ = 180^\circ - 92.40^\circ + 65.11^\circ = \pi - \alpha + \gamma.$$

ユニタリティ三角形と和則

2つの位相の和

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{us} V_{cb} V_{tb}}{V_{ub} \det V_{\text{CKM}}} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} \det V_{\text{CKM}}}{V_{us} V_{ub} V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right],$$

これは

$$\arg \left[-\frac{V_{ud}^2 V_{cb} V_{tb}}{V_{ub}^2 V_{cd} V_{td}} \right] = \arg \left[\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right] + \arg \left[-\frac{V_{ud} V_{cb}}{V_{ub} V_{cd}} \right] = \pi - \alpha + \gamma = 2\gamma + \beta,$$

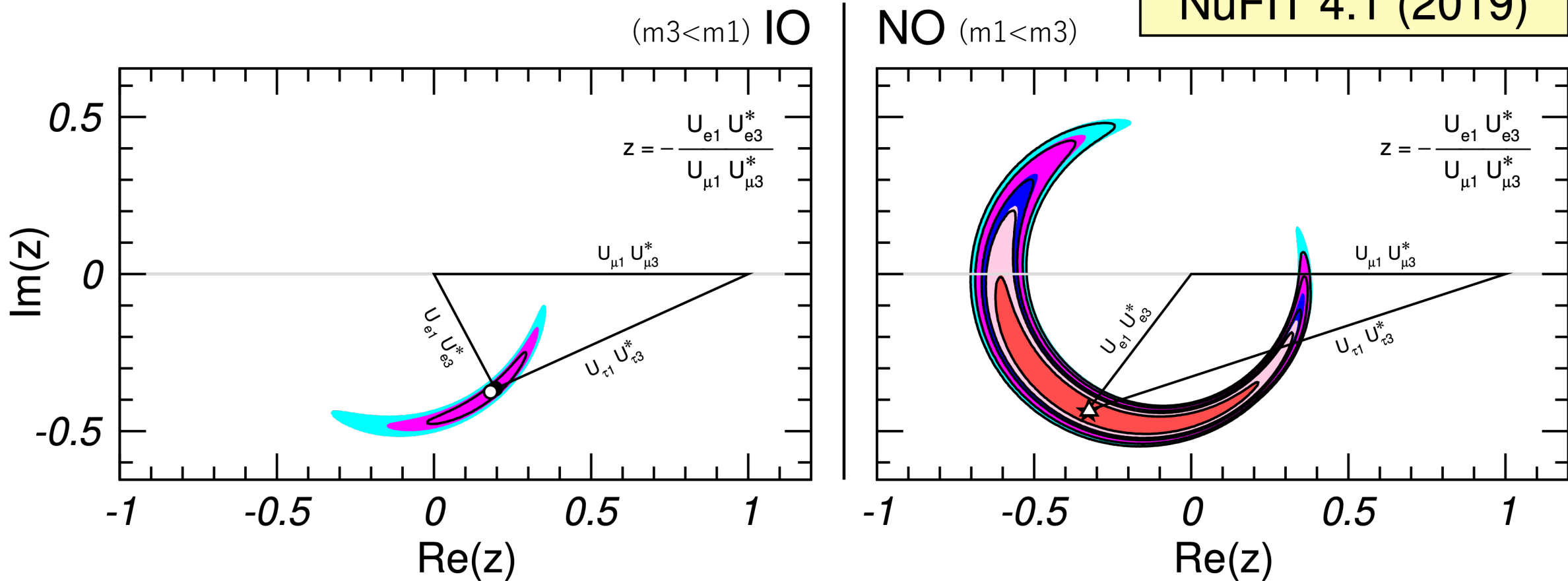
数値的確認（厳密式）

$$\delta_{\text{PDG}} + \delta_{\text{KM}} = 65.15^\circ + 87.56^\circ = 180^\circ - 92.40^\circ + 65.11^\circ = \pi - \alpha + \gamma.$$

CP位相と角度の間には単純な非自明関係が存在！！

MNS行列のユニタリー三角形

NuFIT 4.1 (2019)



ディラック位相 $\delta \sim -\pi/2$ ？だが、NOではNovaとT2Kの間にtension

将来、Hyper-KとDUNE実験で精度が向上