

# Modelagem preditiva e não-linear da função de transferência óptica de um fotobiorreator RGB-LED para o desenvolvimento de gêmeo digital

Fabiane M. Garbim<sup>a\*</sup>, Fernando V. Lima<sup>b</sup>, Antonio Carlos L. Horta<sup>a</sup>

<sup>a</sup>UFSCar, Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brazil

<sup>b</sup>WVU, Department of Chemical and Biomedical Engineering, West Virginia University, Morgantown-WV, USA  
\* fabiane.garbim@estudante.ufscar.br

## RESUMO

Este trabalho propõe modelar a função de transferência óptica (OTF) de um fotobiorreator *flat-panel* com painel de diodos emissores de luz (LEDs) vermelho, verde, azul e branco (RGB-W), empregando redes neurais artificiais (RNA) como calibração de *hardware* voltada ao desenvolvimento de um gêmeo digital. Curvas de calibração foram obtidas varrendo sinais modulados por largura de pulso (PWM) de 0 a 255 para todos os LEDs, com 5 a 18 réplicas por ponto, e medindo a irradiância transmitida através da dorna de vidro com 10 cm de caminho óptico. A RNA *feedforward* dos LEDs individualmente obteve  $R^2 > 0,993$ , enquanto o modelo multiespectral alcançou  $R^2 = 0,999$ . A análise de sobreposição espectral revelou alta seletividade para o LED vermelho e contribuição espectral cruzada do LED verde nos canais adjacentes. Os resultados demonstram que a abordagem baseada em dados fornece uma base confiável para integração em um gêmeo digital do fotobiorreator.

**Palavras-chave:** Fotobiorreator, Rede neural artificial, Função de transferência óptica, Sobreposição espectral, Gêmeo digital.

## 1. Introdução

O cultivo de microalgas em fotobiorreatores (PBRs) fechados tem recebido atenção crescente nas últimas décadas em razão do potencial biotecnológico desses microrganismos para a produção de biocombustíveis, pigmentos de alto valor agregado e tratamento de efluentes (Mohsenpour et al., 2021, Posten, 2009). Em PBRs operados com iluminação artificial, a eficiência fotossintética depende diretamente da quantidade e da qualidade espectral da luz que efetivamente atinge as células, o que torna a caracterização óptica do reator um requisito fundamental para o projeto, controle e aumento de escala do processo (Blanken et al., 2013).

A modelagem da atenuação luminosa em PBRs é tradicionalmente baseada na lei de Lambert-Beer, a qual assume linearidade entre a absorvância e a concentração celular. No entanto, essa abordagem apresenta limitações em meios de cultivo densos, nos quais fenômenos de espalhamento múltiplo e autossombreamento invalidam a premissa de linearidade (Yun e Park, 2003). Em fotobiorreatores com fontes RGB-LED, surge um desafio adicional: a sobreposição espectral, ou *crosstalk*, entre os canais de emissão. A sobreposição espectral ocorre porque os espectros de emissão dos LEDs não são perfeitamente monocromáticos, cada LED emite em uma faixa de comprimentos de onda que pode se sobrepor à faixa de sensibilidade de canais adjacentes do sensor. Assim, quando um único LED é acionado, o sensor registra sinal não apenas no canal correspondente, mas também nos demais canais, resultando em uma interferência espectral que precisa ser quantificada e compensada (Li et al., 2022).

Redes neurais artificiais (RNAs) podem ser utilizadas como uma ferramenta para capturar essas não linearidades sem a necessidade de formulação mecanística explícita. Na literatura recente, RNAs têm sido empregadas com sucesso na predição de crescimento celular, otimização de condições de cultivo e modelagem de irradiância em biorreatores iluminados (Zhang et al., 2021). Paralelamente, o conceito de gêmeo digital, ou *digital twin* vem ganhando relevância na engenharia de bioprocessos, integrando modelos computacionais com dados de sensores em tempo real para fins de monitoramento, controle preditivo e otimização (Udugama et al., 2021).

Apesar dos avanços, a utilização de RNAs para modelar a função de transferência óptica (OTF) de fotobiorreatores com LEDs RGB permanece pouco explorada. O conceito de OTF, definido no domínio da óptica de Fourier como a resposta em frequência espacial de um sistema óptico (Goodman, 2005), é aqui adaptado em sentido amplo para designar o mapeamento completo entre o sinal de controle elétrico (PWM) e a irradiância espectral efetiva no interior do reator, englobando as não linearidades do painel de LEDs, a atenuação pelo vidro

e a sobreposição espectral entre canais. A maioria dos estudos foca na predição de variáveis de cultivo, negligenciando a etapa de calibração do *hardware* óptico que antecede qualquer modelo biológico.

A lei de Lambert-Beer, tradicionalmente empregada para descrever a atenuação luminosa em suspensões celulares, pressupõe que a irradiância incidente ( $I_0$ ) seja conhecida. No entanto, a relação entre o sinal de controle elétrico (PWM) e a irradiância efetiva emitida pelo painel de LEDs é intrinsecamente não linear e envolve atenuação pelo vidro e sobreposição espectral entre canais, fenômenos não contemplados pela Lambert-Beer. Uma vez que o presente trabalho investiga exclusivamente a contribuição do sistema físico (sem biomassa), a calibração do *hardware* constitui uma etapa que antecede a aplicação de qualquer modelo fenomenológico de atenuação biológica. Para essa calibração, a RNA oferece vantagens em relação a modelos de regressão empíricos, como a arquitetura multiespectral com múltiplas saídas que permite mapear simultaneamente todos os canais do sensor em um modelo único, resultando nas interações espectrais entre eles.

O presente trabalho propõe o desenvolvimento de uma camada de calibração baseada em RNA para mapear o sinal PWM dos LEDs na irradiância medida em cada canal de um sensor RGB-W, após a transmissão por uma dorna de vidro com 10 cm de caminho óptico, representativa do fotobiorreator *flat-panel* em estudo. O modelo é concebido como etapa preparatória para um gêmeo digital voltado ao cultivo de microalgas, como a *Scenedesmus obliquus*.

## 2. Metodologia

### 2.1. Aparato experimental e aquisição de dados

O sistema experimental consiste em um fotobiorreator do tipo *flat-panel* iluminado por dois painéis de LEDs RGB-W (vermelho 630 nm, verde 530 nm, azul 470 nm e branco de amplo espectro) posicionados em faces opostas. Os LEDs são controlados individualmente por sinais PWM, com resolução de 8 bits (0 a 255). A dorna utilizada na calibração é composta por duas placas de vidro plano separadas por 10 cm ( $z = 0,10$  m). Ambos os sensores utilizados são do tipo RGB, modelo TCS34725 (AMS), conectados a um microcontrolador Arduino via protocolo I2C. As leituras digitais dos quatro canais (R, G, B e *Clear/W*) são proporcionais à irradiância fotossinteticamente ativa (PAR) e foram convertidas para  $\mu\text{mol f\u00f3ton m}^{-2} \text{s}^{-1}$  diretamente no firmware do Arduino mediante correlações lineares ( $R^2 = 1$ ) validadas com sensor qu\u00e2ntico LI-250 (Guedes, 2021). O sensor 1 (externo) \u00e9 posicionado entre o P\u00e2nel 1 e a primeira placa de vidro, medindo a irradi\u00e2ncia incidente, j\u00e1 o sensor 2 (interno) \u00e9 posicionado entre a segunda placa de vidro, medindo a irradi\u00e2ncia transmitida. Essa configura\u00e7\u00e3o permite calcular a transmit\u00e2ncia do conjunto vidro-c\u00e2mara-vidro.

O protocolo de calibração consiste na varredura do sinal PWM de 0 a 255 em passos de 20 unidades para cada LED individualmente, enquanto os demais permanecem desligados. Para cada ponto de opera\u00e7\u00e3o, foram realizadas m\u00faltiplas medi\u00e7\u00f5es: entre 12 e 18 r\u00e9plicas no sensor interno e 2 a 5 r\u00e9plicas no sensor externo, por ponto de PWM. A m\u00e9dia das r\u00e9plicas foi utilizada como valor representativo e o desvio padr\u00e3o como estimativa da incerteza experimental. O conjunto de dados totaliza 14 a 15 pontos de PWM por LED, com quatro condi\u00e7\u00f5es de LED ativo (branco, vermelho, verde e azul). Os dados foram obtidos na condi\u00e7\u00e3o sem biomassa, o que permite isolar a contribui\u00e7\u00e3o \u00f3ptica do *hardware*.

### 2.2. Modelagem por rede neural artificial

As RNAs foram implementadas em Python utilizando a biblioteca *Scikit-learn* (Pedregosa et al., 2011). Para cada condi\u00e7\u00e3o de LED ativo, uma rede *feedforward* do tipo *Multi-Layer Perceptron* (MLP) com arquitetura 1-5-4 (uma entrada PWM, uma camada oculta com 5 neur\u00f4nios sigmoid e quatro sa\u00eddas correspondentes aos canais R, G, B e W) foi treinada por meio do algoritmo *adam*. Os dados foram divididos em 80% para treino e 20% para teste, com normaliza\u00e7\u00e3o *z-score* aplicada a todas as vari\u00e1veis. A regulariza\u00e7\u00e3o L2 ( $\alpha = 0,001$ ) e o limite de 2000 itera\u00e7\u00f5es foram adotados. A topologia de 5 neur\u00f4nios na camada oculta foi selecionada por valida\u00e7\u00e3o cruzada *k-fold* ( $k = 5$ ), balanceando capacidade preditiva e risco de *overfitting* com a fun\u00e7\u00e3o *early\_stopping=True*. As m\u00e9tricas de avalia\u00e7\u00e3o utilizadas foram o coeficiente de determina\u00e7\u00e3o ( $R^2$ ), a raiz do erro quadr\u00e1tico m\u00e9dio (RMSE) e o erro absoluto m\u00e9dio (MAE). Para compara\u00e7\u00e3o, modelos de regress\u00e3o polinomial de terceiro grau foram ajustados aos mesmos dados.

### 2.3. Modelo multiespectral integrado

Al\u00e9m dos modelos individuais por LED, foi treinada uma RNA multiespectral que recebe quatro entradas (PWM de cada LED) e retorna as quatro sa\u00eddas (canais R, G, B, W), com arquitetura 4-10-5-4 e a mesma configura\u00e7\u00e3o de hiperpar\u00e2metros. Esse modelo visa capturar eventuais intera\u00e7\u00f5es entre os canais quando m\u00faltiplos LEDs forem acionados simultaneamente, cen\u00e1rio relevante para a opera\u00e7\u00e3o real do fotobiorreator. A converg\u00eancia do treinamento foi monitorada pela curva de aprendizado (fun\u00e7\u00e3o de perda versus n\u00famero de \u00e9pocas), a qual

apresentou decaimento monotônico até estabilização antes de 200 épocas, sem evidência de overfitting, indicando que a capacidade do modelo é adequada ao volume de dados disponível.

#### 2.4. Função de transferência óptica de transmitância

A transmitância espectral aparente ( $\tau$ ) foi calculada como a razão entre a irradiância medida no sensor interno e a irradiância medida no sensor externo (após travessia pela câmara de vidro, dorna do biorreator), nas mesmas condições de PWM, conforme a Equação (1):

$$\tau_{(\lambda, PWM)} = \frac{I_{ext}(\lambda, PWM)}{I_{int}(\lambda, PWM)} \quad (1)$$

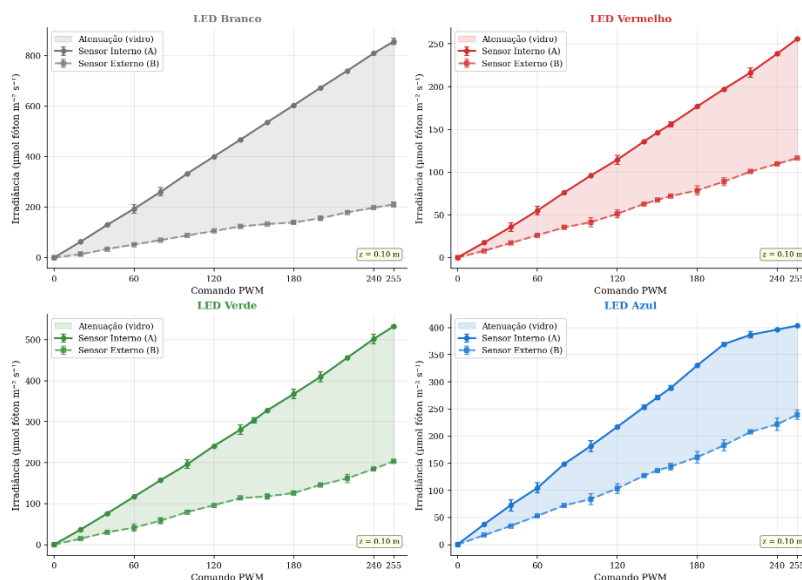
em que  $I_{int}$  e  $I_{ext}$  representam as irradiâncias interna e externa, respectivamente, e  $\lambda$  denota o canal espectral (R, G, B ou W).

### 3. Resultado e Discussão

#### 3.1. Curva de calibração e atenuação óptica

A Figura 1 apresenta as curvas de irradiância em PAR medidas pelos sensores interno (A) e externo (B) para os quatro canais de LEDs, em função do sinal PWM. A área sombreada entre as duas curvas representa a atenuação imposta pelo conjunto vidro-câmara-vidro. Os valores de irradiância estão expressos em  $\mu\text{mol f\u00f3ton m}^{-2} \text{s}^{-1}$ , obtidos após convers\u00e3o direta no firmware do Arduino mediante correla\u00e7\u00f5es lineares validadas com o sensor qu\u00e2ntico LI-250 (Guedes, 2021). Observa-se que a resposta do LED branco \u00e9 a de maior magnitude no sensor interno (at\u00e9  $\sim 860 \mu\text{mol f\u00f3ton m}^{-2} \text{s}^{-1}$  em PWM m\u00e1ximo = 255 para o sensor externo), seguida pelas respostas dos LEDs verde, azul e vermelho. A rela\u00e7\u00e3o PWM-irradi\u00e2ncia exibe comportamento n\u00e3o linear para todos os LEDs, caracterizado por uma tend\u00eancia de satura\u00e7\u00e3o em valores elevados de PWM, sendo este efeito mais pronunciado no LED azul. Essa din\u00e2mica corrobora as caracter\u00edsticas de LEDs de pot\u00eancia, em que a efici\u00eancia qu\u00e2ntica diminui com o aumento da corrente (Blanken et al., 2013). A diferen\u00e7a entre os sensores interno e externo evidencia que a atenua\u00e7\u00e3o \u00e9 dependente do comprimento de onda, sendo mais pronunciada para o LED branco ( $\sim 75\%$  de perda) e menos intensa para o LED azul ( $\sim 50\%$ ), fen\u00f4meno discutido na se\u00e7\u00e3o 3.4.

**Figura 1.** Curvas de irradi\u00e2ncia interna e externa em fun\u00e7\u00e3o do PWM para os quatro canais de LEDs (vermelho, verde, azul e branco). A \u00e1rea sombreada indica a atenua\u00e7\u00e3o pelo conjunto vidro-c\u00e2mara-vidro ( $z = 0,10 \text{ m}$ ).



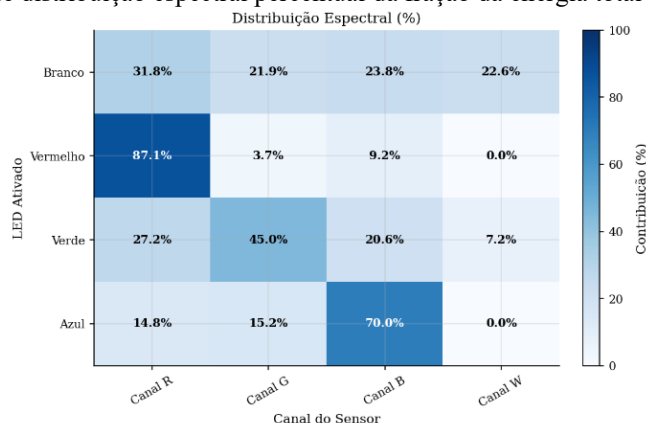
#### 3.2. An\u00e1lise de sobreposi\u00e7\u00e3o espectral

A Figura 2 apresenta a matriz de sobreposi\u00e7\u00e3o espectral entre os LEDs e os canais do sensor, obtida na condi\u00e7\u00e3o de PWM m\u00e1ximo (255). A energia relativa medida em cada canal foi normalizada pela energia total detectada quando um dado LED \u00e9 acionado individualmente. A distribui\u00e7\u00e3o espectral revela padr\u00f5es distintos para cada LED. O LED vermelho (630 nm) exibe a maior seletividade espectral: 87,1% da energia concentra-se no canal R, apenas 3,7% no canal G e 9,2% no canal B, totalizando contribui\u00e7\u00e3o espectral cruzada inferior a 13%

para canais adjacentes. O LED branco, por possuir espectro de emissão largo, distribui a energia de forma mais uniforme: 31,8% em R, 21,9% em G e 23,8% em B.

Em contraste, o LED verde (530 nm) apresenta sobreposição espectral elevada: 27,2% no canal R e 20,6% no canal B, além de 45,0% no canal dominante G. Essa contribuição cruzada pode ser atribuída à largura de banda de emissão mais ampla característica dos LEDs verdes, que tipicamente emitem em faixa espectral mais larga que os LEDs vermelho e azul (Schubert, 2006). O LED azul (470 nm) concentra 70,0% no canal B, mas distribui 15,2% ao canal G, fenômeno coerente com a extensão do espectro de emissão azul para comprimentos de onda maiores. Essa análise quantitativa é fundamental para o design de estratégias de controle que combinem múltiplos LEDs, pois permite compensar digitalmente a interferência espectral e fornecer ao gêmeo digital um modelo preciso da iluminação efetiva no interior do fotobiorreator (Li et al., 2022).

**Figura 2.** Matriz de distribuição espectral percentual da fração da energia total detectada em cada canal.



### 3.3. Desempenho dos modelos preditivos

Ambos os modelos RNA e polinomial para os canais dominantes de cada LED atingiram  $R^2 > 0,98$  (Tabela 1). O polinomial mostrou menor MAE nos canais dominantes (ex.: vermelho: 1,33 vs. 2,39), apresentando desempenho equivalente à RNA para LEDs individuais. O modelo multiespectral obteve  $R^2 = 0,9993$  e  $RMSE < 6$ , evidenciando que a rede neural é capaz de mapear simultaneamente todos os canais com alta fidelidade quando múltiplos LEDs operam em conjunto.

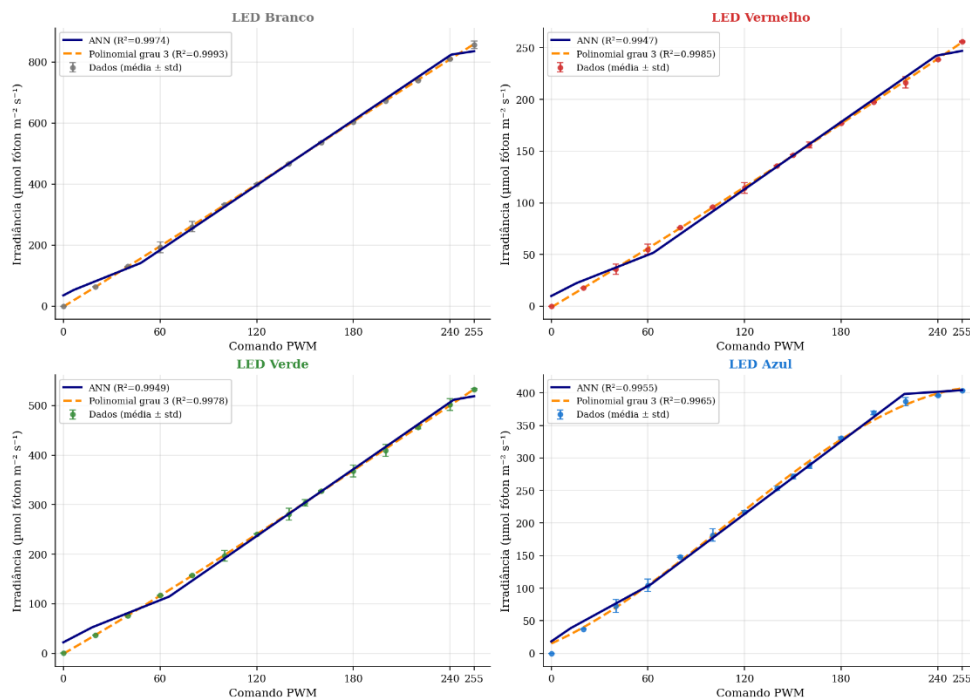
**Tabela 1.** Métricas de desempenho ( $R^2$ , RMSE e MAE) de RNA e polinomial de cada LED.

LED	Modelo	$R^2$	RMSE	MAE
Branco (W)	RNA	0,9967	14,26	5,64
Branco (W)	Polinomial	0,9976	12,24	3,41
Vermelho (R)	RNA	0,9942	4,67	1,94
Vermelho (R)	Polinomial	0,9959	3,95	1,33
Verde (G)	RNA	0,9939	6,23	3,00
Verde (G)	Polinomial	0,9954	5,43	1,93
Azul (B)	RNA	0,9951	11,98	3,67
Azul (B)	Polinomial	0,9939	7,67	5,65
Multiespectral	RNA	0,9993	< 6	—

A Figura 3 apresenta a sobreposição das curvas previstas pela RNA e pelo modelo polinomial, juntamente com os dados experimentais e suas barras de incerteza, para o canal W de cada LED. As duas curvas são praticamente indistinguíveis na maior parte da faixa de PWM, exceto para o LED azul em PWM > 200, onde o modelo polinomial diverge visivelmente, ainda que de forma sutil, dos dados experimentais enquanto a RNA

mantém aderência. Os valores de  $R^2$  exibidos diretamente nos painéis da figura confirmam o desempenho quantitativamente equivalente de ambos os modelos.

**Figura 3.** Curvas previstas pela RNA (linha contínua vermelha) e pelo modelo polinomial (linha tracejada azul) sobrepostas aos dados experimentais (pontos pretos com barras de erro) para cada LED



### 3.4. Transmittância aparente

A transmittância aparente ( $\tau$ ) calculada pela Equação (1) revelou valores médios de aproximadamente 25% para o LED branco, 46% para o vermelho, 38% para o verde e 50% para o azul. A menor transmittância do LED branco é consistente com a maior absorção do vidro na região de comprimentos de onda curtos que compõem o espectro largo. O LED azul, apesar de também emitir em comprimentos de onda curtos (~470 nm), apresentou a maior transmittância, o que sugere que a absorção do vidro é parcialmente compensada pela faixa estreita de emissão desse LED (Schubert, 2006). Esses valores de transmittância representam a linha de base óptica do sistema sem biomassa, sendo necessário para a posterior separação entre a atenuação causada pelo *hardware* e aquela provocada pela suspensão celular.

### 3.5. Implicações para o gêmeo digital

O modelo RNA desenvolvido configura a camada de calibração de *hardware* de um gêmeo digital do fotobiorreator. Ao fornecer um mapeamento preciso entre o sinal PWM e a irradiância em cada canal, a rede permite desacoplar o comportamento óptico do LED do fenômeno biológico de absorção pela biomassa. Dessa forma, etapas subsequentes de modelagem (absorção celular, crescimento fotossintético) podem ser construídas sobre uma base de dados confiável, sem a propagação de erros sistemáticos de *hardware*. Em cultivos reais, a irradiância efetiva que atinge as células é modelada pela lei de Lambert-Beer (Equação 2):

$$I = I_0 \cdot e^{-\sigma \cdot C \cdot z} \quad (2)$$

na qual  $I_0$  (μmol fóton m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>) é a irradiância na parede interna do reator (incidente sobre a suspensão celular),  $\sigma$  (m<sup>2</sup> kg<sup>-1</sup>) é o coeficiente de absorvidade específico da biomassa para o comprimento de onda  $\lambda$ ,  $C$  (kg m<sup>-3</sup>) é a concentração celular, e  $z$  (m) é a profundidade óptica a partir da parede iluminada (Pruvost et al., 2019). O modelo RNA fornece precisamente o valor de  $I_0$  em função do sinal PWM e da transmittância do conjunto de vidro, eliminando a necessidade de medições adicionais e permitindo que a Equação (2) seja aplicada a partir de uma linha de base calibrada. Essa integração é o diferencial central da abordagem proposta em relação a estudos que assumem  $I_0$  como grandeza conhecida ou medida diretamente por sensores comerciais de alto custo.

A quantificação da sobreposição espectral acrescenta uma dimensão raramente abordada na literatura de PBRs com LEDs RGB, permitindo que o gêmeo digital compense digitalmente a interferência espectral ao projetar

protocolos de iluminação espectral personalizados para cada espécie de microalga. Para a *Scenedesmus obliquus*, espécie-alvo do sistema aqui descrito, a literatura reporta respostas bioquímicas distintas sob iluminação azul, vermelha e combinada (Guedes, 2021), o que reforça a necessidade de um modelo OTF preciso como pré-requisito para a otimização da qualidade espectral em malha fechada.

#### 4. Conclusão

Este trabalho demonstrou a viabilidade de empregar redes neurais artificiais para modelar a função de transferência óptica de um fotobiorreator *flat-panel* equipado com LEDs RGB-W. A RNA (1-5-4) alcançou  $R^2$  acima de 0,98 em todos os canais com resíduos de distribuição aleatória e sem evidência de overfitting na curva de aprendizado, enquanto o modelo multispectral integrado obteve  $R^2$  global de 0,9993. A análise quantitativa da sobreposição espectral revelou que o LED vermelho é o mais seletivo (87% no canal R, contribuição espectral cruzada < 13%) e o LED verde apresenta a maior contribuição espectral cruzada (45% em R e B), informação relevante para o design de protocolos de iluminação em cultivos de microalgas, pois indicam quais comprimentos de onda demandam maior compensação espectral no controle da iluminação interna.

A abordagem proposta constitui a primeira camada de um gêmeo digital do fotobiorreator e serve como base para modelos mais complexos que incorporem a dinâmica de crescimento de microalgas, como a *Scenedesmus obliquus*. Trabalhos futuros incluem a integração dos dados de cultivo com biomassa, a modelagem da atenuação biológica e a implementação de controle preditivo em tempo real. Como desdobramentos específicos, os próximos passos incluem: (i) a repetição do protocolo de calibração com biomassa em diferentes concentrações para modelar a atenuação biológica; (ii) a integração do modelo OTF com um modelo cinético de crescimento para formar o gêmeo digital completo; e (iii) a validação do gêmeo digital em cenários de controle preditivo de irradiância em tempo real.

**Agradecimentos:** Este estudo foi financiado, em parte, pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Número do Processo #2023/16549-3. Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código Financeiro 001. Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da UFSCar pelo apoio institucional.

#### Referências

- Blanken, W., Cuaresma, M., Wijffels, R. H., & Janssen, M. (2013). Cultivation of microalgae on artificial light comes at a cost. *Algal Research*, 2(4), 333–340. <https://doi.org/10.1016/j.algal.2013.09.004>
- Guedes, V.C. Controle policromático de luz aplicado à produção de microalgas. Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 2021.
- Li, X., Seraphin, A., & Mauser, K. (2022). Spectral calibration and *crosstalk* correction for multi-channel LED photobioreactor systems. *Biotechnology and Bioengineering*, 119(6), 1542–1554. <https://doi.org/10.1002/bit.28073>
- Mohsenpour, S. F., Hennige, S., Willoughby, N., Adelopo, A., & Danaher, A. S. S. (2021). Integrating microalgae into wastewater treatment: A review. *Science of The Total Environment*, 752, 142168. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.142168>
- Posten, C. (2009). Design principles of photo-bioreactors for cultivation of microalgae. *Engineering in Life Sciences*, 9(3), 165–177. <https://doi.org/10.1002/elsc.200900003>
- Pruvost, J., Cornet, J. F., & Legrand, J. (2008). Hydrodynamics influence on light conversion in photobioreactors: An energetically consistent analysis. *Chemical Engineering Science*, 63(14), 3679–3694. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.04.026>
- Schubert, E. F. (2006). *Light-emitting diodes* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Udugama, I. A., Lopez, P. C., Shahtalebi, A., Harrington, C., Severson, K., Gernaey, K. V., ... & Mansouri, S. S. (2021). The role of digital twin in the future of biopharma. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 60(37), 12987–13002. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.1c02352>
- Yun, Y. S., & Park, J. M. (2003). Attenuation of monochromatic and polychromatic lights in *Chlorella vulgaris* suspensions. *Applied Microbiology and Biotechnology*, 63(2), 159–164. <https://doi.org/10.1007/s00253-003-1402-9>
- Zhang, D., del Rio-Chanona, E. A., & Hellgardt, K. (2021). Hybrid physics-informed neural network model for the prediction of microalgae growth. *Computers & Chemical Engineering*, 153, 107430. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107430>