

Minimização dos Custos de Instalação e Operação de uma Rede de Distribuição de Água via *Bound Contraction*

Maria Izabela de Almeida Silva^a, Eduardo Henrique Bender Pacola^a,
Carolina Borges de Carvalho^a, Esdras Penêdo de Carvalho^{b,*}

^a Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Engenharia Química, Maringá-PR, Brasil

^b Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática, Maringá-PR, Brasil

* epcarvalho@uem.br

RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo de otimização para o projeto ótimo de uma Rede de Distribuição de Água (RDA) com bombeamento, com o objetivo de minimizar o custo total de instalação e operação. O modelo é formulado como um Problema Não-Linear Inteiro Misto (MINLP), obtido por meio da reformulação do problema discreto original utilizando Programação Disjuntiva Generalizada (PDG). A solução é obtida pelo método determinístico de *Bound Contraction* (Faria e Bagajewicz, 2011), dispensando o uso de simuladores hidráulicos externos, uma vez que as equações de balanço de massa e energia, as perdas de carga (Hazen-Williams) e os limites de pressão e velocidade são incorporados diretamente como restrições do modelo de otimização. O modelo foi implementado no software GAMS. Como estudo de caso, otimizou-se a Rede Grande Setor, um problema de referência na literatura. O custo ótimo total encontrado foi de \$ 2.272.173,19, ligeiramente inferior ao de \$ 2.272.331,75 reportado por Surco et al. (2018) com algoritmo de enxame de partículas, confirmando a eficiência do método determinístico proposto.

Palavras-chave: rede de distribuição de água; MINLP; programação disjuntiva generalizada; *bound contraction*; otimização global

1 Introdução

Uma Rede de Distribuição de Água (RDA) é a unidade de um Sistema de Abastecimento de Água (SAA) responsável por transportar água tratada dos reservatórios até os pontos de consumo – residências, indústrias e estabelecimentos comerciais – com pressão, vazão e qualidade adequadas (Gomes, 2009). Dentre todos os componentes do SAA, a RDA representa o item de maior impacto nos custos totais do sistema, pois engloba os custos de aquisição e instalação das tubulações e o custo energético do bombeamento. O projeto ótimo de uma RDA consiste em selecionar os diâmetros comerciais das tubulações e a altura manométrica do sistema de bombeamento de forma a minimizar o custo total, respeitando as equações hidráulicas e os limites operacionais de pressão e velocidade. Como os diâmetros comerciais são variáveis discretas e as equações hidráulicas são não-lineares, o problema se enquadra na classe de Programação Não-Linear Discreta Mista (MDNLP). Ao transformar as variáveis discretas em variáveis binárias por meio da Programação Disjuntiva Generalizada (PDG) (Lee e Grossmann, 2000), obtém-se um Problema Não-Linear Inteiro Misto (MINLP). A literatura registra amplo uso de meta-heurísticas para resolver este problema, como Algoritmos Genéticos (Goldberg e Kuo, 1987), Enxame de Partículas (Surco et al., 2018) e Algoritmo de Colônia de Formigas (Maier et al., 2003). Embora eficientes em tempo computacional, esses métodos não garantem a otimalidade global. Em contraste, métodos determinísticos como o *Bound Contraction* (BC) de Faria e Bagajewicz (2011) e o *Branch-and-Bound* (Land e Doig, 1960) fornecem garantias de qualidade da solução. Outra característica distinta deste trabalho é a não utilização de simuladores hidráulicos externos, como o EPANET (Rossman, 2000). As equações de conservação de massa e energia, as correlações de perda de carga e os limites de pressão e velocidade são incorporados diretamente como restrições do modelo MINLP, o que torna o modelo autossuficiente e portátil. Abordagem similar foi adotada por Cassiolato et al. (2021), que validou a abordagem determinística sem simulador para redes de pequeno e médio porte. O presente trabalho tem como objetivos: (i) formular o modelo MINLP completo para RDA com bombeamento, incluindo os custos de instalação e de operação energética; (ii) aplicar o método *Bound Contraction* combinado com *Branch-and-Bound* para garantir a convergência global; e (iii) validar o modelo com a Rede Grande Setor, comparando o resultado com a literatura.

2 Metodologia

2.1 Modelo de otimização

Considere uma RDA com n_t tubulações, n_n nós de demanda e n_c loops. Cada tubulação $j \in \text{Tubos}$ deve receber um diâmetro comercial $x_j \in \mathcal{D} = \{D_1 < D_2 < \dots < D_{n_d}\}$, em que a cada diâmetro D_i estão associados um custo unitário $\text{Custo}(D_i)$ (\$/m) e um coeficiente de rugosidade R_i . O custo total a minimizar é:

$$\min C_T + C_E = \sum_{j \in \text{Tubos}} \lambda_j + E_h H_{\text{otm}}, \quad (1)$$

em que $\lambda_j = L_j \text{Custo}(x_j)$ é o custo de instalação da tubulação j de comprimento L_j , H_{otm} é a altura manométrica do sistema de bombeamento (variável de decisão) e E_h é o custo atualizado de pressurização por metro de elevação (\$/m), dado por:

$$E_h = \frac{9,81 Q}{\eta} E_c N_{\text{op}} F_a, \quad F_a = \frac{(1 + e_2)^{n_a} - (1 + e_1)^{n_a}}{(e_2 - e_1)(1 + e_1)^{n_a}}, \quad (2)$$

com Q a vazão total bombeada, η o rendimento do conjunto motor-bomba, E_c o custo de energia, N_{op} as horas anuais de operação, F_a o fator de atualização, e_1 a taxa de juros e e_2 a taxa de reajuste anual de energia, ao longo de n_a anos de vida útil. As restrições do modelo são:

balanço de massa nos nós,

$$\sum_{j \in FI_k} q_j - \sum_{j \in FO_k} q_j = \text{dmd}(k), \quad \forall k \in N; \quad (3)$$

balanço de energia nos loops,

$$\sum_{j \in PPD_\gamma} h_f(j) - \sum_{j \in NPD_\gamma} h_f(j) = E_p^\mu(\gamma), \quad \forall \gamma \in \text{Loops}; \quad (4)$$

perda de carga (Hazen-Williams),

$$h_f(j) = \frac{\omega L_j q_j^\alpha}{C_j^\alpha x_j^\beta}, \quad \forall j \in \text{Tubos}; \quad (5)$$

pressão mínima em todos os nós,

$$\text{pr}(k) \geq \text{pr}_{\min}; \quad (6)$$

e limites de velocidade, $v_{\min} \leq v_j \leq v_{\max}$, com

$$v_j = 4q_j / (\pi x_j^2). \quad (7)$$

2.2 Reformulação MINLP via Programação Disjuntiva Generalizada

As variáveis discretas x_j , λ_j e σ_j (rugosidade) são reformuladas por meio da Programação Disjuntiva Generalizada (Lee e Grossmann, 2000; Grossmann e Ruiz, 2012) na formulação *Convex Hull*. Introduzindo variáveis binárias $y_{i,j}$ (igual a 1 se o trecho j recebe o diâmetro D_i , e 0 caso contrário):

$$x_j = \sum_{i=1}^{n_d} D_i y_{i,j}, \quad (8)$$

$$\lambda_j = L_j \sum_{i=1}^{n_d} \text{Custo}(D_i) y_{i,j}, \quad (9)$$

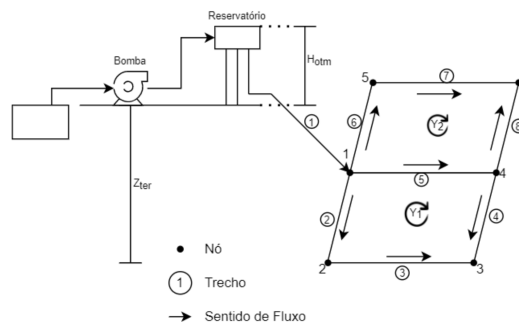
$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{n_d} R_i y_{i,j}, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n_d} y_{i,j} = 1, \quad y_{i,j} \in \{0, 1\}. \quad (11)$$

A Equação (11) garante que exatamente um diâmetro comercial seja selecionado por trecho. A função objetivo (1) torna-se linear nas variáveis binárias, mas o modelo permanece não-linear pelas equações hidráulicas (5) e pela equação de velocidade (7).

Figura 1: Topologia da Rede Grande Setor (8 trechos, 6 nós, 2 loops, 1 reservatório).

Fonte: Autoria própria.



2.3 Método Bound Contraction

O método BC de Faria e Bagajewicz (2011) obtém o ótimo global por meio da redução progressiva dos intervalos das variáveis. O algoritmo opera em quatro passos:

Passo 0 (Inicialização). Defina os intervalos iniciais $[\bar{x}_i^L, \bar{x}_i^U]$ com base nos limites de diâmetro disponíveis.

Passo 1 (Limitante inferior – LB). Linearize as equações não-lineares substituindo cada produto $z_k = f(x_i) \cdot g(x_j)$ por envelopes lineares: $z_k \geq \bar{x}_i^L g(x_j)$ e $z_k \leq \bar{x}_i^U g(x_j)$. A Tabela 1 resume as quatro linearizações necessárias. Resolva o modelo linearizado (MILP) para obter LB.

Passo 2 (Limitante superior – UB). Use a solução do Passo 1 como estimativa inicial para resolver o MINLP original. A solução viável encontrada fornece UB.

Passo 3 (Contração). Para cada variável x_r , calcule o ponto de referência $x_r^{\text{ref}} = (\bar{x}_r^L + \bar{x}_r^U)/2$ e as distâncias $d_r^L = x_r^{\text{ref}} - \bar{x}_r^L$ e $d_r^U = \bar{x}_r^U - x_r^{\text{ref}}$. Se $d_r^L < d_r^U$, resolva o modelo ALBL com $z_{rj} \geq \alpha_r^L y_j$, em que $\alpha_r^L = x_r^{\text{ref}} + s d_r^U$, varrendo $s \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$ até que o modelo seja inviável ou seu objetivo supere UB. Atualize $\bar{x}_r^U \leftarrow \alpha_r^L(s^*)$. O caso $d_r^L \geq d_r^U$ é tratado de forma análoga com o modelo ALBU. Repita o Passo 1 até que $(UB - LB)/UB < \varepsilon$ ou o intervalo $\bar{x}_r^U - \bar{x}_r^L < \varepsilon$.

Quando o algoritmo entra em estagnação, o método *Branch-and-Bound* (B&B) é acionado: o intervalo $[\bar{x}_i^L, \bar{x}_i^U]$ da variável de maior amplitude é dividido ao meio, gerando dois subproblemas. A busca em largura (BFS) seleciona o ramo com menor UB, descartando os infactíveis.

Tabela 1: Linearizações das equações não-lineares para o modelo LB.

Equação original	Variável auxiliar (linearizada)
$v_j = 4q_j/(\pi x_j^2)$	$z_1 = v_j x_j^2 \Rightarrow z_1 \pi = 4q_j$
Hazen-Williams (5)	$z_2 = h_f^{1/\alpha} C_j x_j^{\beta/\alpha} \Rightarrow z_2 = \omega^{1/\alpha} L_j^{1/\alpha} q_j$
Darcy-Weisbach	$z_3 = h_f x_j, z_4 = f_j v_j \Rightarrow 2gz_3 = L_j z_4$
Swamee-Jain	$z_4 = f_j [\log_{10}(\varepsilon/3,7x_j + 5,74v_j^{0,9}/(v_j x_j)^{0,9})]^2 \Rightarrow z_4 = 0,25$

3 Estudo de Caso: Rede Grande Setor

3.1 Descrição da rede

A Rede Grande Setor é um problema de referência amplamente utilizado na literatura (Gouveia, 2012; Surco et al., 2018). Trata-se de uma rede malhada com 1 reservatório elevado, 6 nós de demanda, 8 trechos e 2 loops (γ_1 e γ_2), conforme a Figura 1. A alimentação é feita por gravidade a partir do reservatório, cuja altura manométrica H_{om} é a variável de otimização que determina o custo de bombeamento.

O conjunto de diâmetros comerciais disponíveis contém 10 opções, variando de 0,1084 m (PVC) a 0,6196 m (ferro dútil DEFoFo), com custos entre \$ 23,55/m e \$ 320,15/m. Os coeficientes de rugosidade de Hazen-Williams são 130 (PVC) e 145 (DEFoFo). A pressão mínima exigida nos nós é de 25 mca e os limites de velocidade são $v_{\min} = 0,2$ m/s e $v_{\max} = 3,0$ m/s. Portanto, este problema possui 10^8 soluções discretas possíveis. Os parâmetros econômicos de operação são: $N_{op} = 7300$ h/ano, $\eta = 75\%$, $n_a = 20$ anos, $e_1 = 12\%$, $e_2 = 6\%$ e $E_c = \$ 0,10/\text{kWh}$.

Os limites de Reynolds calculados para as condições da rede ficam entre $2,15 \times 10^4$ e $1,84 \times 10^6$, dentro dos limites de validade da equação de Hazen-Williams para os materiais utilizados. Assim, a perda de carga foi calculada pela equação de Hazen-Williams (Equação 5), com $\alpha = 1,852$, $\beta = 4,87$ e $\omega = 10,65$ (unidades SI).

3.2 Resultados

O modelo MINLP foi implementado e resolvido no ambiente GAMS 31.2, usando o solver SCIP para o MINLP e o solver CPLEX para os subproblemas LP/MILP. A implementação foi realizada em um computador pessoal, Intel(R) Core(TM) i5-9300H, CPU 2.40GHz, RAM 8GB. O modelo relaxado LB possui 12 variáveis e 11 equações; o modelo original (UB) possui 11 variáveis e 11 equações. A tolerância foi fixada em $\varepsilon = 1\%$.

Na iteração 0, o modelo relaxado forneceu LB = \$ 323.714,38 e o modelo original forneceu UB = \$ 2.272.176,07. As variáveis foram contraídas na ordem x_j , h_f , v_j e σ_j , para os limites inferior e superior, usando os valores atualizados a cada passo. A Tabela 2 resume o histórico de convergência.

Tabela 2: Histórico de convergência do *Bound Contraction*.

Iter.	LB (\$)	UB (\$)	Gap (%)	Status
0	323.714,38	2.272.176,07	85,76	Contração ativa
1	458.203,12	2.272.176,07	79,84	Contração ativa
2	601.524,85	2.272.176,07	73,52	Contração ativa
3	720.847,08	2.272.176,07	68,27	Estagnação → B&B
B&B	2.272.173,19	2.272.173,19	$1,3 \times 10^{-4}$	Convergiu

Na terceira iteração, o algoritmo entrou em estagnação, ativando o *Branch-and-Bound* com busca em largura (BFS). Após a ramificação e exploração dos nós factíveis, o algoritmo convergiu para o ótimo global.

O custo ótimo total encontrado foi de 2.272.173,19, composto por custo de instalação \$ 1.662.535,10 e custo operacional \$ 609.638,09. A altura manométrica ótima é $H_{otm} = 13,6547$ m. A Tabela 3 compara os resultados com o trabalho de referência (Surco et al., 2018), que utilizou o algoritmo de enxame de partículas com o simulador hidráulico EPANET.

Tabela 3: Comparação dos custos ótimos da Rede Grande Setor.

Componente de custo	Surco et al. (2018)	Presente trabalho
Custo de instalação (\$)	1.662.535,10	1.662.535,10
Custo operacional (\$)	609.796,65	609.638,09
Custo total (\$)	2.272.331,75	2.272.173,19
Altura manométrica (m)	—	13,6547

Os diâmetros ótimos selecionados para os 8 trechos coincidem com os de Surco et al. (2018): 0,6196 m (trecho 1), 0,2998 m (trechos 2 e 4), 0,2520 m (trechos 3 e 6), 0,5180 m (trecho 5) e 0,2042 m (trechos 7 e 8). As pressões nos nós ficam entre 25,00 mca (nó 3, no limite mínimo) e 30,84 mca (nó 1). O custo total inferior ao da literatura deve-se à menor altura manométrica encontrada pelo modelo determinístico, que explora analiticamente a sensibilidade do custo operacional a H_{otm} .

3.3 Análise das condições hidráulicas

A Tabela 4 apresenta os diâmetros e pressões ótimas por nó. As velocidades calculadas nos trechos variam de 0,37 m/s (trecho 7) a 2,84 m/s (trecho 2), permanecendo dentro dos limites $v_{min} = 0,2$ m/s e $v_{max} = 3,0$ m/s exigidos pela NBR 11218 (NBR 11218, 1994). Os números de Reynolds correspondentes variam entre $2,15 \times 10^4$ e $1,84 \times 10^6$, dentro da faixa de validade da equação de Hazen-Williams para os materiais considerados (PVC e ferro dúctil DEFoFo), conforme os critérios de Gomes (2009).

A restrição ativa de pressão mínima ocorre no nó 3 (25,00 mca), o ponto de maior perda acumulada na rede. Esse resultado confirma que o modelo encontrou a solução de menor custo que ainda satisfaz todas as restrições operacionais: qualquer redução de diâmetro nos trechos que compõem o caminho até o nó 3 aumentaria a perda de carga e violaria a restrição de pressão mínima, enquanto a altura manométrica H_{otm} é determinada exatamente pelo balanço de energia nesse caminho crítico.

Tabela 4: Diâmetros ótimos por trecho e pressões ótimas por nó.

Trecho	Diâm. (m)	Vazão (m ³ /h)	Nó	Pressão (mca)	Cota (m)
1	0,6196	1,3944	1	30,84	6,0
2	0,2998	1,1268	2	27,10	5,5
3	0,2520	0,6368	3	25,00	5,5
4	0,2998	0,6879	4	26,30	6,0
5	0,5180	1,3342	5	26,62	4,5
6	0,2520	1,1971	6	25,40	4,0
7	0,2042	0,4967			
8	0,2042	0,7336			

Do ponto de vista metodológico, a não utilização de simulador hidráulico externo é uma vantagem prática relevante: as equações de perda de carga e balanço de energia são satisfeitas pelo solver, eliminando a necessidade de interfaces com EPANET ou equivalentes. Isso simplifica a implementação e favorece a integração com ferramentas de otimização de processos em plataformas como o GAMS (Cassiolato, 2019), e permite o acoplamento direto com modelos de síntese de processos industriais que demandam infraestrutura hídrica.

4 Conclusões

Este trabalho apresentou um modelo MINLP para o projeto ótimo de uma Rede de Distribuição de Água com bombeamento, integrando os custos de instalação e operação em uma única formulação determinística, sem recurso a simuladores hidráulicos externos. As principais contribuições são:

(i) *Formulação MINLP autossuficiente.* As equações de Hazen-Williams, os balanços de massa nos nós e de energia nos loops, e os limites de pressão e velocidade foram incorporados diretamente como restrições do modelo. Essa abordagem elimina a dependência de ferramentas como o EPANET, tornando o modelo portátil e integrável a plataformas de otimização de processos, como o GAMS (Cassiolato et al., 2021; Cassiolato, 2019).

(ii) *Reformulação via PDG/Convex Hull.* A transformação das variáveis discretas de diâmetro em variáveis binárias $y_{i,j}$ por meio da formulação de envoltória convexa (Lee e Grossmann, 2000) produz um MINLP de estrutura regular, resolúvel por solvers de propósito geral (SCIP, CPLEX). A reformulação garante que a relaxação LP/MILP do Passo 1 forneça um limitante inferior válido e progressivamente mais apertado ao longo das iterações.

(iii) *Solução global via Bound Contraction + Branch-and-Bound.* O algoritmo BC (Faria e Bagajewicz, 2011) contraiu os intervalos das variáveis em três iterações antes de entrar em estagnação. O B&B com busca em largura (BFS) garantiu a convergência para o ótimo global com gap final de $1,3 \times 10^{-4} \%$, bem abaixo da tolerância $\epsilon = 1 \%$. O custo total encontrado (\$ 2.272.173,19) é inferior ao melhor resultado heurístico da literatura (\$ 2.272.331,75, Surco et al. 2018), com os mesmos diâmetros selecionados por ambos os métodos — evidência forte de otimalidade global da seleção de tubulações.

Do ponto de vista do desempenho computacional, a fase de Bound Contraction executou três iterações com contração ativa antes de entrar em estagnação. Cada iteração do BC envolve a resolução de múltiplos subproblemas MILP (modelo ALBL/ALBU com incremento $\Delta s = 0,2$) e um subproblema MINLP completo para obtenção do UB. A estagnação ocorreu porque a integridade das variáveis binárias $y_{i,j}$ impede a contração contínua dos intervalos ao atingir um conjunto de diâmetros factível. O B&B com BFS resolveu o problema remanescente, explorando os nós de forma ordenada por UB crescente e descartando ramos inactíveis ou dominados, até certificar a otimalidade global.

Entre as limitações do presente trabalho destaca-se a aplicação restrita à Rede Grande Setor, um problema de pequeno porte (10^8 combinações discretas, 8 trechos). Em redes maiores, o custo computacional do B&B pode crescer exponencialmente, exigindo estratégias de poda mais sofisticadas ou decomposição do problema (D'Ambrosio et al., 2014). Além disso, o modelo considera demandas e parâmetros econômicos determinísticos; a incorporação de incertezas demanda extensões para programação estocástica ou robusta.

Trabalhos futuros contemplarão: (a) aplicação a redes de médio e grande porte com múltiplos reservatórios e fontes; (b) extensão para reabilitação de redes existentes, com decisões simultâneas de substituição e expansão

(Surco et al., 2017); (c) formulação multiobjetivo envolvendo custo, resiliência hidráulica e confiabilidade de abastecimento; e (d) incorporação de variáveis de controle para válvulas redutoras de pressão e bombas de velocidade variável.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Estadual de Maringá (PEQ-UEM), à Capes, ao CNPq e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Referências

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. (1994). *NBR 11218: Projeto de rede de distribuição de água para abastecimento público*. ABNT, Rio de Janeiro.
- Cassiolato, G. H. B. (2019). *Otimização de redes de distribuição de água* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Maringá.
- Cassiolato, G. H. B., Pedroza, I. C. B., Carvalho, E. P., & Ravagnani, M. A. S. S. (2021). Optimization of water distribution networks using a deterministic approach. *Engineering Optimization*, 53(1), 107–124.
- D'Ambrosio, C., Lodi, A., Wiese, S., & Bragalli, C. (2014). Mathematical programming techniques in water network optimization. *European Journal of Operational Research*, 243(3), 774–788.
- Faria, D. C., & Bagajewicz, M. J. (2011). Novel bound contraction procedure for global optimization of bilinear MINLP problems with applications to water management problems. *Computers and Chemical Engineering*, 35(3), 446–455.
- Goldberg, D. E., & Kuo, C. H. (1987). Genetic algorithms in pipeline optimization. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 1(2), 128–141.
- Gomes, H. P. (2009). *Sistemas de Abastecimento de Água: Dimensionamento Econômico e Operação de Redes e Elevatórias* (3ª ed.). Editora Universitária/UFPB.
- Gouveia, R. M. (2012). *Modelo Computacional de Otimização para Dimensionamento de Redes de Distribuição de Água Abastecida por Múltiplos Bombeamentos* (Tese de doutorado). Universidade Federal da Paraíba.
- Grossmann, I. E., & Ruiz, J. P. (2012). Generalized disjunctive programming: A framework for formulation and alternative algorithms for MINLP optimization. In J. Lee & S. Leyffer (Eds.), *Mixed Integer Nonlinear Programming* (pp. 93–115). Springer.
- Land, A., & Doig, A. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(4), 497–520.
- Lee, S., & Grossmann, I. E. (2000). New algorithms for nonlinear generalized disjunctive programming. *Computers and Chemical Engineering*, 24(9), 2125–2141.
- Maier, H. R., Simpson, A. R., Zecchin, A. C., Foong, W. K., Phang, K. Y., Seah, H. Y., & Tan, C. L. (2003). Ant colony optimization for design of water distribution systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 129(3), 200–209.
- Rossman, L. A. (2000). *EPANET 2 User's Manual*. U.S. Environmental Protection Agency, Cincinnati.
- Surco, D. F., Vecchi, T. P. B., & Ravagnani, M. A. S. S. (2017). Rehabilitation of water distribution networks using particle swarm optimization. *Desalination and Water Treatment*, 106, 321–329.
- Surco, D. F., Vecchi, T. P. B., & Ravagnani, M. A. S. S. (2018). Optimization of water distribution networks using a modified particle swarm optimization algorithm. *Water Science and Technology: Water Supply*, 18(2), 660–678.