May 14, 2026

菅野浩明

1　位相的弦理論（world sheet viewpoint）– Gromov-Witten 不変量

1.1　２次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称シグマ模型の A ツイスト（復習）

２次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称（非線形）シグマ模型　　$\phi:\Sigma_g \longrightarrow X$.
Σ_g：種数 g の（閉）リーマン面，X：ケーラー多様体 $\Longrightarrow \mathcal{N}=(2,2)$ 超対称性.

ツイスト（A-ツイストと B-ツイストがある）の操作により２次元位相的シグマ模型が構成できる．ここでは A-ツイスト（A-模型）の場合を扱う．A-模型の観測可能量 $\mathcal{O}_a$（BRST コホモロジー類）は X のド・ラームコホモロジー $H^*_{\rm dR}(X,\mathbb{Z})$ から導かれる．

位相的相関関数 $\langle \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n\rangle$ が 0 とならないための選択則はフェルミオン（ゴースト場）のゼロモードの数を指数定理から求めることにより

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \deg\mathcal{O}_i &= \dim H^0(\Sigma_g,\phi^*T^{(1,0)}X)-\dim H^1(\Sigma_g,\phi^*T^{(1,0)}X)=\mathrm{index}\,\overline{\partial}\\ &= 2d\,(1-g)+2\int_{\Sigma_g}\phi^*(c_1(X)),\qquad d:=\dim_{\mathbb{C}}X.\end{aligned}$$

特に X が３次元カラビ・ヤウ多様体（$d=3, c_1(X)=0$）であれば $\sum_{i=1}^n\deg\mathcal{O}_i=6(1-g)$. したがって $g>1$ のとき全ての位相的相関関数は 0 である．$g=1$ のとき $\langle 1\rangle_{g=1}$ のみが非自明な位相的相関関数（楕円種数）である．$g=0$ のとき３点関数

$$C_{abc}:=\langle\mathcal{O}_a\mathcal{O}_b\mathcal{O}_c\rangle_{g=0}=\frac{\partial^3F_0(t)}{\partial t^a\partial t^b\partial t^c}$$

が X の量子コホモロジーの構造定数を定める．また構造定数 C_{abc} についてそのプレポテンシャル $F_0(t)$ が存在する（X の複素化されたケーラー構造のモジュライ空間は平坦構造を持つ $\Longleftarrow$ ミラー対称性）．

1.2　位相的重力理論との結合＝世界面のモジュライ空間上の積分

位相的弦理論は位相的シグマ模型を２次元（位相的）重力理論と “結合” させることにより構成される．２次元重力理論との “結合” 方法は Polyakov による世界面の視点からの弦理論の定式化と全く同様である．これは Σ_g の計量に関する径路積分により実現されるが，この積分は微分同相不変性と共形対称性によりリーマン面の共形構造（複素構造）のモジュライ空間上の有限次元積分に帰着する．

弦理論の世界面 Σ_g 上の Polyakov 作用の BRST 量子化において，エネルギー・運動量テンソルは $T(z)=[Q_B,b(z)]_+$ と BRST 自明な形に書ける．ここで $b(z)$ は微分同相（無限小座標変換）のゲージ固

定に伴う反ゴースト場である．位相的シグマ模型において反ゴースト場に対応するのはツイストの結果 1-形式となる（すなわちスカラーにならない方の）超対称荷電 $(G_z, G_{\bar{z}})$ に対するカレント $(G_{zz}, G_{\bar{z}\bar{z}})$ である．$g>1$ に対する弦理論振幅の定義において，反ゴースト場を $(G_{zz}, G_{\bar{z}\bar{z}})$ で置き換えることにより，位相的弦理論の振幅を

$$F_g(t_1, t_2, \ldots, t_n) := \int_{\mathcal{M}_g} \left\langle \prod_{k=1}^{6g-6} (G, \mu_k) \right\rangle_{\Sigma_g}, \qquad (G, \mu_k) := \int_{\Sigma_g} \left(G_{zz}(\mu_k)_{\bar{z}}^{z} + G_{\bar{z}\bar{z}}(\overline{\mu}_k)_{z}^{\bar{z}} \right)$$

と定義する．ここで世界面 Σ_g 上の期待値 $\langle \bullet \rangle_{\Sigma_g}$ は重み $e^{-S_{\mathrm{top}}(t)}$ をもつ $\phi : \Sigma_g \longrightarrow X$ の径路積分で定義されるものとする．また，位相的シグマ模型の作用 $S_{\mathrm{top}}(t)$ は次のように与えられている．X のケーラー２形式を ω とする．また $b_2(X) = \dim H_2(X, \mathbb{Z})$ とする．

$$S_{\mathrm{top}}(t) = \int_{\Sigma_g} \phi^*(\omega) = \int_{\beta = \phi(\Sigma_g)} \omega = \sum_{a=1}^{b_2} d_a \int_{\sigma_a} \omega = \sum_{a=1}^{b_2} d_a t^a, \qquad t^a := \int_{\sigma_a} \omega.$$

ただし $H_2(X, \mathbb{Z})$ の基底 σ_a を選んで $\beta = \sum_{a=1}^{b_2} d_a \sigma_a$ と展開した．さらに $\mu_k, k = 1, 2, \ldots, 6g-6$ はベルトラミ微分と呼ばれる Σ_g の複素構造の無限小変形を記述する $H^1_{\bar{\partial}}(\Sigma_g, T^{(1,0)}\Sigma_g)$ の基底である．このとき位相的相関関数に対する選択則は

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \mathcal{O}_i = 2(1-g)(d-3) + 2n + 2\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X)), \qquad d = \dim_{\mathbb{C}} X$$

となる．右辺に付け加わった項 $6(g-1) + 2n$ は種数 g の n 点つきリーマン面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ の（実）次元である．したがって X が３次元カラビ・ヤウ多様体ならば $\sum_{i=1}^{n} \deg \mathcal{O}_i = 2n$ となり全ての観測可能量に対して $\deg \mathcal{O}_i = 2$ である限り，選択則は常に満たされている．すなわち位相的相関関数は（世界面の観点から）あらゆる種数からの寄与を含むことになる！

種数 g のリーマン面からの寄与を

$$F_g(t_1, t_2, \ldots, t_n) := \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} N_{g,\beta} e^{-\sum_{a=1}^{b_2} d_a t^a}$$

と展開するときの展開係数 $N_{g,\beta} = N_{g;d_1,\ldots d_n} \in \mathbb{Q}$ を Gromov-Witten 不変量という．ここで d_i は写像 ϕ の巻きつき数（インスタントン数）であり，ϕ の正則性より非負整数のみが許される．さらに位相的弦理論の分配関数を

$$Z_{\mathrm{top,str}}(t_i; g_s) = \exp\left(\sum_{g=0}^{\infty} g_s^{2g-2} F_g(t_i) \right)$$

と定義する．ここで複素化されたケーラーパラメータ t_i がインスタントン展開のパラメータ，g_s は種数展開のパラメータである．$z_a = e^{-t_a}$ とおけば

$$F_g(z) = \sum_{d_1=0}^{\infty} \sum_{d_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{d_{b_2}=0}^{\infty} N_{g;d_1,\ldots d_{b_2}} \prod_{a=1}^{b_2} z_a^{d_a}$$

は $|z_a| << 1$ に関する多重級数展開である．すなわちこれは $t_a >> 1$ での展開であり，その収束半径は $N_{g;d_1,\ldots d_{b_2}}$ の漸近挙動から決まっている．領域 $t_a >> 1$ はケーラー形式 ω のスケールが大きくなる領域で large volume limit と呼ばれている．級数が有限の収束半径をもつ（相転移点が存在する）ことは，$\omega \to 0$ となるときシグマ模型による弦理論の記述が信頼できなくなることを意味していると考えられる．

2 位相的弦理論（target space viewpoint）– Gopakumar-Vafa 不変量

一般に種数 $g > 1$ における Gromov-Witten 不変量を（個別に）計算するのは難しいが，全ての種数について足し上げた位相的弦理論の分配関数を標的空間 X の視点から計算することができる．これが Gopakumar-Vafa の主張である．

$$Z_{\mathrm{GV}} = \exp\left[\sum_{Q\in H_2(X,\mathbb{Z})} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{r,Q}}{k}\left(2\sinh\frac{kg_s}{2}\right)^{2r-2} e^{-k\sum_a d_a t_a}\right], \qquad Q = \sum_{a=1}^{b_2} d_a \sigma_a.$$

ここで $n_{r,Q} = n_{r;d_1,d_2,\ldots,d_{b_2}} \in \mathbb{Z}$ を Gopakumar-Vafa 不変量という．$n_{r,Q}$ は BPS 状態の数を（符号付きで）数えているため必ず整数値となる．変数 $q = e^{-g_s}, z_a = e^{-t_a}$ を導入して

$$Z_{\mathrm{GV}} = \exp\left[\sum_{d_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{d_{b_2}=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}n_{r;\vec{d}}(q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}})^{2r-2}\prod_{a=1}^{b_2} z_a^{kd_a}\right]$$

と書くのが便利である．なお，後に分かるように因子 $\left(2\sinh\frac{kg_s}{2}\right)^{2r-2} = (q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}})^{2r-2}$ は，その由来から $(q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}})^{-2}$ と $(q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}})^{2r}$ の２つの因子からなるとみなすのが自然である．

Gopakumar-Vafa の分配関数を $q = e^{-g_s}$ に関する（有理）関数とみなすとき $q \to 0$ が $g_s \to \infty$ に対応するので，弦理論の強結合領域での計算が信頼できると期待される．II A 型超弦理論の強結合極限として M 理論が提案されているが，M 理論を 3 次元カラビ・ヤウ多様体 X 上コンパクト化すると５次元の超対称（ゲージ）理論が得られる．M 理論における $M2$ ブレインが X の 2 サイクルに巻き付くことにより 5 次元理論の BPS 粒子ができる．この質量は g_s^{-1} に比例しているので強結合領域で非常に軽くなる．このような粒子の寄与からなる有効作用を求めれば，それが位相的弦理論の分配関数を与えるだろうというのが Gopakumar-Vafa の考えたことである．これは４次元超対称ゲージ理論の非摂動展的低エネルギー有効作用を計算する Seiberg-Witten 理論と共通する見方である．

Gopakumar-Vafa 不変量を用いると位相的弦理論の分配関数は plethystic exponential の形に書かれていることが分かる．したがって位相的弦理論の分配関数は無限積表示をもつ（ゼータ関数のオイラー積表示と比較せよ）．

$$Z_{\mathrm{GV}} = \mathrm{P.E.}\left[\sum_{r=0}^{\infty} F_r(z_a, q)\right], \qquad F_r(z_a, q) = \sum_{\vec{d}} n_{r,\vec{d}}\,[q]^{2r-2}\prod_{a=1}^{b_2} z_a^{d_a}.$$

ここで記号

$$[x] := x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = -[x^{-1}]$$

を用いた.

$$[q]^2 = q + q^{-1} - 2, \qquad [q]^{-2} = q\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

に注意する.

2.1 Plethystic exponential

関数 $F(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)$ に対して Plethystic exponential を

$$\mathrm{P.E.}[F(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)] = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F(t_1^k, t_2^k, \cdots, t_\ell^k)\right)$$

と定義する. $F(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)$ が以下のように展開されるとする（ただし $a_{0\cdots 0} = 0$ を仮定する）.

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_\ell) = \sum_{n_1, \cdots, n_\ell \in \mathbb{Z}} a_{n_1 \cdots n_\ell} t_1^{n_1} \cdots t_\ell^{n_\ell} \ .$$

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} F(t_1^k, t_2^k, \cdots, t_\ell^k) &= \sum_{n_1, \cdots, n_\ell \in \mathbb{Z}} a_{n_1 \cdots n_\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} t_1^{kn_1} \cdots t_\ell^{kn_\ell} \\ &= -\sum_{n_1, \cdots, n_\ell \in \mathbb{Z}} a_{n_1 \cdots n_\ell} \log(1 - t_1^{n_1} \cdots t_\ell^{n_\ell})\end{aligned}$$

より Plethystic exponential は無限積に因子化する.

$$\mathrm{P.E.}[F(t_1, t_2, \cdots, t_\ell)] = \prod_{n_1, \cdots, n_\ell \in \mathbb{Z}} (1 - t_1^{n_1} \cdots t_\ell^{n_\ell})^{-a_{n_1 \cdots n_\ell}}.$$

MacMahon 関数は Plethystic exponential の典型的な例である.

$$M(t) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k[t^k]^2}\right) \ .$$

様々な計算で登場するもう一つの例は

$$(x; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n) = \mathrm{P.E.}\left[-\frac{x}{1-q}\right] = \mathrm{P.E.}\left[\frac{x/\sqrt{q}}{[q]}\right]$$

である.

3　定数自己双対背景電磁場中の荷電粒子 (BPS 粒子）の有効作用

Gopakumar-Vafa による位相的弦理論の分配関数の計算の基礎となるのは Schwinger による以下のような古典的計算である．

3.1　BPS 粒子の非摂動的有効作用

４次元ユークリッド空間における定数自己双対背景電磁場 $F_{12} = F_{34} = \hbar$ の下で，電荷 e，質量 m をもつ複素スカラー場 ϕ の有効作用は作用

$$S = |(\partial_a - ieA_a)\phi|^2 + m^2|\phi|^2$$

の径路積分により与えられる． ϕ に関する（形式的）Gauss 積分により

$$S_{\text{eff}} = \log\det\,(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2)$$

が得られる．ここで $\Delta_{ab} = D_a^2 + D_b^2$ はゲージ共変ラプラシアンであり，交換関係

$$[D_1, D_2] = [D_3, D_4] = ie\hbar$$

が成り立つ．これは座標と運動量に関する正準交換関係と同じ形であることに注意する．熱核展開（proper time expansion）を用いて

$$\log\det\,(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2) = \mathrm{Tr}\log(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2) = \int_\epsilon^\infty \frac{dt}{t}\mathrm{Tr}\; e^{-t(\Delta_{12}+\Delta_{34}+m^2)}$$

とする．調和振動子の分配関数の計算に倣えば

$$\mathrm{Tr} e^{-t(\Delta_{12}+\Delta_{34}+m^2)} = e^{-tm^2}\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-te\hbar(n+\frac{1}{2})}\right)^2 = \frac{e^{-tm^2}}{\left(2\sinh\frac{te\hbar}{2}\right)^2}$$

が分かる．BPS 条件 $m = e$ を用いるとともに変数変換 $s = te\hbar$ を行うことにより

$$S_{\text{eff}} = \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s}\frac{e^{-\frac{m}{\hbar}s}}{\left(2\sinh\frac{s}{2}\right)^2}$$

を得る．

3.2　有効作用の摂動展開とリーマン面のモジュライ空間のオイラー数

質量 μ の BPS 粒子に対する有効作用は

$$S_{\text{eff}}(\mu) = \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s}\frac{e^{-s\mu/\hbar}}{(2\sinh(s/2))^2} = \int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s^3}\left(\frac{s/2}{\sinh(s/2)}\right)^2 e^{-s\mu/\hbar}$$

ここで公式

$$\left(\frac{s/2}{\sinh(s/2)}\right)^2 = 1 - \sum_{g=1}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} s^{2g}$$

を用いると $\epsilon \to 0$ とするとき $g > 1$ では積分は収束している．

$$\begin{aligned} -\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} \int_0^\infty ds\ s^{2g-3} e^{-s\mu/\hbar} &= -\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} \left(\frac{\hbar}{\mu}\right)^{2g-2} \Gamma(2g-2) \\ &= -\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \left(\frac{\hbar}{\mu}\right)^{2g-2} . \end{aligned}$$

ここでガンマ関数の定義は

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt\ t^{s-1} e^{-t}$$

である．これは種数 $g > 1$ のリーマン面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ のオイラー数

$$\chi_g = \frac{(-1)^{g-1} B_{2g}}{2g(2g-2)}$$

を再現している！(符号因子 $(-1)^{g-1}$ は $\hbar \to i\hbar$ あるいは $\mu \to i\mu$ とすることで得られる？)

3.3 $g = 0, 1$ に対する正則化

有効作用 S_{eff} の積分表示 は $\epsilon \to 0$ において $g = 0, 1$ の部分に発散を含むので適切な正則化が必要である．ここで紹介するのは Nekrasov による正則化の処方箋である．

$$\gamma_\hbar(x; \Lambda) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1-s}} \frac{e^{-tx}}{(e^{\hbar t}-1)(e^{-\hbar t}-1)} .$$

Bernoulli 数 B_n の定義式

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n , \quad B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6} \cdots , \quad (B_{2k+1} = 0, k > 0)$$

から導かれる

$$\frac{1}{(e^t-1)(e^{-t}-1)} = \frac{d}{dt} \frac{1}{e^t - 1} = -t^{-2} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} t^{2g-2}$$

を代入して計算すると

$$\begin{aligned}
&\gamma_\hbar(x;\Lambda)\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1-s}}e^{-tx}\left(-(\hbar t)^{-2}+\sum_{g=1}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}(\hbar t)^{2g-2}\right)\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}}\left(\frac{\Lambda\tilde{t}}{x}\right)^s e^{-\tilde{t}}\left(-\left(\frac{x}{\hbar\tilde{t}}\right)^2+\frac{1}{2}B_2+\sum_{g=2}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\left(\frac{\hbar\tilde{t}}{x}\right)^{2g-2}\right)\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{\Lambda}{x}\right)^s\left[-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}+\frac{1}{2}B_2+\sum_{g=2}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2}\frac{\Gamma(s+2g-2)}{\Gamma(s)}\right]\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{\Lambda}{x}\right)^s\left[-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2\frac{1}{(s-2)(s-1)}+\frac{1}{12}+\sum_{g=2}^\infty \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2}s(s+1)\cdots(s+2g-1)\right]\\
&= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2\log\frac{\Lambda}{x}-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2(-\frac{1}{4}+1)+\frac{1}{12}\log\frac{\Lambda}{x}+\sum_{g=2}^\infty\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}\left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2}\right]\\
&= \hbar^{-2}\left(\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{\Lambda}-\frac{3}{4}x^2\right)-\frac{1}{12}\log\frac{x}{\Lambda}+\sum_{g=2}^\infty\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}\left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2}
\end{aligned}$$

である．ここで種数 0 の項は Seiberg-Witten プレポテンシャルの摂動部分 (1-ループ部分）を再現している．また種数 0 の係数に $\frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial x^3}$ を作用させると $\frac{1}{6}x^{-1}$，種数 1 の係数を x で対数微分すると $-\frac{1}{12}$ が得られるが，これらはリーマン面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ のオイラー指標に対応している．

$$\chi(\mathcal{M}_{0,3})=\frac{1}{6},\qquad \chi(\mathcal{M}_{1,0})=-\frac{1}{12}$$

4　定数写像 = $D0$ ブレイン = KK modes の寄与

M 理論の立場から定数写像の寄与は次のように計算される．M 理論を S^1 でコンパクト化するとき S^1 の半径は結合定数 g_s に比例する．$g_s\to 0$ となる弱結合領域で S^1 の半径が 0 となり 10 次元の IIA 型超弦理論となる．この立場では，S^1 でコンパクト化の K-K モードが IIA 型超弦理論の $D0$ ブレインを与える．その質量は

$$m=\frac{2\pi i n}{g_s}\ ,\qquad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

である．全ての K-K モードの寄与を足し上げて

$$\begin{aligned}
F(g_s) &= \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\int_\epsilon^\infty\frac{dt}{t}\frac{e^{-\frac{2\pi i n}{g_s}t}}{\left(2\sinh\frac{t}{2}\right)^2}\ ,\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\int_\epsilon^\infty\frac{dt}{t}\frac{e^{-2\pi i n t}}{\left(2\sinh\frac{tg_s}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

が得られる（正確には $\hbar g_s$ を改めて g_s と読み替えている）．ここで Poisson の和公式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}e^{2\pi i n s}=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(s-m)$$

を用いて

$$F(g_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{\left(2\sinh\frac{mg_s}{2}\right)^2}$$

である．これは自明なコホモロジー類 $Q = 0$ に対して GV 不変量は $n_{r,Q=0} = \delta_{r,0}$ であることを意味している．

4.1 定数写像の寄与（強結合領域）MacMahon 関数と平面分割の数え上げ

前節の計算から

$$\begin{aligned} F(g_s) &:= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \left(2\sinh\frac{dg_s}{2}\right)^{-2} = -\sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{d(1-q^d)^2} \\ &= -\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{nd}}{d} = \sum_{n=1}^{\infty} n\log(1-q^n) \end{aligned}$$

と書くことができる．したがって分配関数は Mac-Mahon 関数

$$M(q) = Z(q) = e^{-F(q)} = \prod_n \frac{1}{(1-q^n)^n} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 24q^5 + \cdots$$

で与えられる． Mac-Mahon 関数の Taylot 展開の q^N の係数は N 個の立方体からなる平面分割（3D Young 図）の数を与えることが知られている．これは $|q| << 1$，すなわち強結合領域 $g_s \to +\infty$ で適切な表示であり，位相的弦理論のいわゆる結晶融解模型による描像を与える．

4.2 定数写像の寄与（弱結合領域）リーマン面のモジュライ空間上の Hodge 積分

弱結合 $t := -g_s \to 0$ 領域における種数展開を計算するために Mellin 変換

$$G(s) := \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1-s}} F(t) = -\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1-s}} \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d} e^{-ndt}$$

を考える．積分と和の順序交換により

$$G(s) = -\sum n^{1-s} d^{-1-s} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1-s}} e^{-x} = -\zeta(s-1)\zeta(s+1)\Gamma(s)\ .$$

が得られる．Mellin 逆変換公式は

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\ (s)=s_0} ds\ G(s) t^{-s}$$

である。ここで積分路は $G(s)$ の任意の極より右側を通るものとする．被積分関数の極の位置を調べる．まずガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $s = -n, n = 0, 1, 2, \cdots$ に単純極を持ち，そこでの留数は $\frac{(-1)^n}{n!}$ である．一方，ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s = 1$ に留数 1 の単純極を持ち，$s = -2, -4, -6, \cdots$ では 1 位の零点がある．以上から

$\zeta(s-1)\zeta(s+1)\Gamma(s)$ は $s=2$ で単純極，$s=0$ で 2 位の極を持つ．さらに $s=-2n, n\in\mathbb{N}$ では単純極を持つ．なお $s=-1,-3,-5\cdots$ における極はゼータ関数の零点により打ち消される．以上から

$$\begin{aligned}F(t) &= -\left[\zeta(3)\Gamma(2)t^{-2}+\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\zeta(s-1)t^{-s}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\zeta(1-2n)\zeta(-1-2n)t^{2n}\right]\\ &= \zeta(3)g_s^{-2}-\zeta'(-1)-\frac{1}{12}\log(-ig_s)+\sum_{g\geq 2}\frac{(-1)^g B_{2g}B_{2g-2}}{(2g-2)!2g(2g-2)}g_s^{2g-2}\end{aligned}$$

が得られる．ただし $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}, \zeta(1-2n)=-\frac{B_{2n}}{2n}$ を用いた．ここで g_s^{2g-2} の係数は種数 g のリーマン面のモジュライ空間上のホッジ積分

$$\int_{\mathcal{M}_g} c_{g-1}^3 = (-1)^{g-1}\chi_g\frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}}$$

に一致し，定数写像に対する Gromov-Witten 不変量を正しく再現している．ここで モジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ 上にランク g のベクトル束（ホッジ束）$\mathcal{H}$ が定義され，その全チャーン類を $c(\mathcal{H})=1+tc_1+\cdots+t^{g-1}c_{g-1}+t^g c_g$ とした．すなわち c_{g-1} は $\mathcal{M}_g$ 上の $2(g-1)$ 形式である．

5 Rigid な $D2$-ブレイン = $M2$ ブレインからの寄与 (conifold)

5.1 Conifold = local $\mathbb{P}^1$ の位相的弦理論の分配関数 = $U(1)$ Nekrasov 分配関数

Resolved conifold $X:\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)\longrightarrow\mathbb{P}^1$ に対して $b_2=1$ であり，その生成元を $Q\in H_2(X,\mathbb{Z})$ とする．BPS 状態は 2-サイクル $Q\simeq\mathbb{P}^1$ に巻きつく $M2$ ブレイン（あるいは $D2$ ブレインとそこに拘束された $D0$ ブレインの結合系）と同定される.（巻きつき数を 1 とすれば）BPS 状態のスペクトルは A を $\mathbb{P}^1$ の面積として $m=\frac{2\pi(A+in)}{g_s}, n\in\mathbb{Z}$ となる．ここで n は $D0$ ブレインの数（KK モード）である．定数写像の寄与の場合と同様の計算により

$$F(g_s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{-2\pi nA}}{\left(2\sinh\frac{ng_s}{2}\right)^2}\ .$$

が得られる．したがって分配関数は $Q=e^{-t}, t=2\pi A$ とおけば

$$Z=\exp(-F)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-Qq^n)^{-n}\ ,$$

となり，この場合も 0 でない GV 不変量は $n_{r,Q}=\delta_{r,0}$ のみである．次節で見るようにこれは $\mathbb{P}^1$ が rigid である（モジュライ空間が 1 点からなる）ことと種数が 0 で，その上の平坦直線束が自明であることによる．公式

$$\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}=x^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n(2n-2)!}x^{2n-2}\ ,$$

を用いて，種数展開すれば

$$
\begin{aligned}
F(g_s,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n}\left((ng_s)^{-2}+\sum_{g=1}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}(ng_s)^{2g-2}\right)\\
&= (g_s)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n^3}+\frac{1}{12}(g_s)^0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n}+\sum_{g=2}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}(n)^{2g-3}\\
&= (g_s)^{-2}\mathrm{Li}_3\left(e^{-t}\right)-\frac{1}{12}(1-e^{-t})+\sum_{g=2}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\mathrm{Li}_{3-2g}\left(e^{-t}\right).
\end{aligned}
$$

が得られる．

ここで計算した分配関数は $U(1)$ ゲージ理論に対する Nekrasov 分配関数とみなすことができる．$U(1)$ ゲージ理論に対する Nekrasov 分配関数は分割（ヤング図）λ に関する和の形で

$$
Z_{\mathrm{U}(1)}(q,Q)=\sum_{\lambda}C_{\varnothing\varnothing\lambda}(q)C_{\varnothing\varnothing\lambda^{\vee}}(q)(-Q)^{|\lambda|}
$$

と書くことができる．ここで $q=e^{-\epsilon}$ は（反自己双対な）Ω 背景，$Q=e^{-a}$ は $U(1)$ ゲージ場の真空期待値 a に対応するパラメータである．また $C_{\varnothing\varnothing\lambda}(q)$ はシューア関数 $s_\lambda(x)$ を用いて

$$
C_{\varnothing\varnothing\lambda}(q)=s_\lambda(x_i=q^{i-\frac{1}{2}})\qquad \lambda\text{に対応する } SU(N) \text{ の表現の量子次元}
$$

で与えられる．ここで公式

$$
\sum_{\lambda}s_\lambda(x)s_{\lambda^{\vee}}(y)=\prod_{i,j\geq 1}(1+x_iy_j)
$$

を用いて

$$
Z_{\mathrm{U}(1)}(q,Q)=\prod_{i,j\geq 1}(1-Qq^{i+j+1})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-Qq^n)^n
$$

となる．

6 BPS 粒子のスペクトルと準安定層のモジュライ空間のコホモロジー

6.1 一般のスピンを持つ BPS 粒子の寄与

一般に $M2$ ブレインが 2 サイクル $Q\in H_2(X,\mathbb{Z})$ に巻きついてできる 5 次元の massive BPS 状態を考える．5 次元の massive BPS 状態のスピン (j_L,j_R) は $SO(4)=SU(2)_L\times SU(2)_R$ の表現でラベルされる．また 5 次元の massive BPS 状態は超対称性を半分保つので必ず half-hyper 多重項 $\left[\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus 2(0,0)\right]$ を含む．以上から 5 次元の massive BPS 状態をスピン分解は BPS 状態の多重度を表す非負整数 $N_Q^{(j_l,j_R)}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$
\left[\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus 2(0,0)\right]\otimes N_Q^{(j_l,j_R)}(j_L,j_R)
$$

と表すことができる．ここで背景電磁場が自己双対であることから BPS 粒子との相互作用は j_R に依らない．したがって有効作用の計算に効くのは

$$N_Q^{j_L} = \sum_{j_R} (-1)^{2j_R}(2j_R+1)N_Q^{(j_l,j_R)}(j_L,j_R)$$

で，これは整数値をとる．ここで $SU(2)_L$ の表現について，次のような基底の取り替えを行うのが便利である．

$$\sum_{j_L} N_Q^{j_L}[j_L] = \sum_{r=0}^{\infty} n_{r,Q} \otimes I_r$$

ここで $I_r = \left((\frac{1}{2} \otimes 2(0)\right)^{\otimes r}$ である． $SU(2)_L$ の表現の指標

$$\chi[j_L] = q^{-j_L} + q^{-j_L+1} + \cdots + q^{j_L} = \frac{q^{j_L+\frac{1}{2}} - q^{-j_L-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \qquad \chi[I_r] = \left(2 + q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\right)^r = (q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}})^{2r}$$

の比較から $n_{r,Q} \in \mathbb{Z}$ が定まる．例えば $(\frac{1}{2}) \otimes (\frac{1}{2}) = (1) \oplus (0)$ より $(1) = (I_1 - 2I_0)^2 - I_0 = I_2 - 4I_1 + 3I_0$ である．I_r を単位とすることにより j_L に関するトレースの計算は

$$\sum_{j_L} \mathrm{Tr}\, N_Q^{j_L}[j_L] = \sum_{r=0}^{\infty} n_{r,Q}\, \mathrm{Tr}\, I_r = \sum_{r=0}^{\infty} n_{r,Q}(2 - 2\cosh(g_s))^r = \sum_{r=0}^{\infty} n_{r,Q}(-1)^r \left(2\sinh\frac{g_s}{2}\right)^{2r}$$

となる．

6.2 準安定層のモジュライ空間上の Lefschetz 作用と BPS 粒子

D ブレインは数学的に準安定層 (semi-stable sheaf) として記述できると提案されている．その立場から Gopakumar-Vafa 不変量を与える BPS 粒子 の数え上げの問題を捉えてみよう．準安定層のモジュライ空間

$$\widetilde{\mathcal{M}}_Q = \{\mathcal{F} : X \text{ 上の準安定層} \mid \mathrm{supp}(\mathcal{F}) = Q \in H_2(X,\mathbb{Z})\}/\sim$$

を考える．$\widetilde{\mathcal{M}}_Q$ はケーラー多様体となることが知られており，そのコホモロジー類 $H^*(\widetilde{\mathcal{M}}_Q)$ が 2 サイクル Q に $D2 = M2$ ブレインが巻きついて生じる BPS 粒子に対応する．ここで $[\mathcal{F}] \in \widetilde{\mathcal{M}}_Q$ に対して，そのサポート $\mathrm{supp}([\mathcal{F}])$ を対応させる写像を $\pi : \widetilde{\mathcal{M}}_Q \longrightarrow \mathcal{M}_Q$ とする．ここで $\mathcal{M}_Q$ は $D2$ ブレインのモジュライ空間と見なすことができ，そのファイバーは $D2$ ブレイン上の平坦ベクトル束（$\mathrm{rank}[\mathcal{F}] = 1$ ならば平坦直線束）のモジュライ空間である．このとき，BPS 粒子のスピンは $H^{(p,q)}(\widetilde{\mathcal{M}}_Q)$ へのケーラー形式 ω を外積するレフシェッツ作用

$$J_+ = \omega \wedge, \qquad J_- = J_+^*, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\left(p + q - \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{\mathcal{M}}_Q\right)$$

で決まる．ここでレフシェッツ作用をファイバー方向とベース方向に分解したものが BPS 粒子に対する $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 作用と解釈される．すなわち $H^{(p,q)}(\widetilde{\mathcal{M}}_Q)$ を $SU(2)_L \times SU(2)_R$ レフシェッツ作用で固有空間分解した際の固有空間の次元が $N_Q^{(j_L,j_R)}$ に他ならない．

この解釈の下で $N_Q^{(j_L,j_R)}$ から Gopakumar-Vafa 不変量 $n_{r,Q}$ を定義する際に用いた $I_r = \left((\frac{1}{2} \otimes 2(0)\right)^{\otimes r}$ は幾何学的に次のような意味を持つ．まず 2 次元トーラス T のコホモロジー類 $H^*](T^2)$ をレフシェッツ作用で固有空間分解すると $H^*(T^2)$ の基底 $1, dz, d\bar{z}, dz\wedge d\bar{z}$ に関して $J_+ \cdot 1 = dz\wedge d\bar{z}, J_+ dz = J_+ d\bar{z} = 0$ であり J_3 固有値は $-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}$ である．したがって，その固有空間分解は $I_1 = \left((\frac{1}{2} \otimes 2(0)\right)$ であり $I_r = \left((\frac{1}{2} \otimes 2(0)\right)^{\otimes r}$ は $2r$ 次元トーラス T^{2r} のコホモロジー類の固有空間分解と解釈できる．ここで 2 サイクル Q の種数を g とすれば Q 上の平坦直線束のモジュライ空間は Q のヤコビ多様体 $\mathrm{Jac}(Q)$ であり，これはトーラス T^{2g} になる．$r = g$ とすれは $I_r = \left((\frac{1}{2} \otimes 2(0)\right)^{\otimes r}$ は $\mathrm{Jac}(Q)$ のレフシェッツ分解と解釈することができる．

7 精密化位相的弦理論と Nekrasov 分配関数

Gopakumar-Vafa 不変量に関わる有効作用を計算する際には自己共役な背景定数電磁場をとったために 5 次元 BPS 粒子の $SU(2)_R$ スピンの情報は残らなかった．自己共役とは限らない背景定数電磁場 $F_{12} = \epsilon_1, F_{34} = \epsilon_2$ を考えれば BPS 状態の多重度を表す非負整数 $N_Q^{(j_l,j_R)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の情報が全て残るはずである．これが精密化 (refined) 位相的弦理論である．３次元トーリックカラビ・ヤウ多様体上の精密化位相的弦理論は Nekrasov 分配関数と一致する.（３次元トーリックカラビ・ヤウ多様体に対するミラー対称性から，ある代数曲線が定まる．これが Seiberg=Witten 曲線に一致している.）

7.1 $SU(2)$ Pure Yang-Mills 理論 = local $\mathbb{F}_0$ の精密化位相的弦理論の BPS 粒子のスペクトル

（物質馬を含まない）$SU(2)$ Pure Yang-Mills 理論の Nekrasov 分配関数は $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の正準 (canonical) 直線束を３次元トーリック（非コンパクト）カラビ・ヤウ多様体とした場合の精密化位相的弦理論の分配関数である．Nekrasov 分配関数にはヤング図を用いた組み合わせ論的明示公式が知られている．この公式を用いて非負整数 $N_Q^{(j_l,j_R)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の情報を以下のように読み取ることが可能である．

Nekrasov 分配関数の１インスタントン部分から

$$N_{B+nF}^{(j_L,j_R)} = \delta_{j_L,0}\delta_{j_R,n+\frac{1}{2}} \ ,$$

この結果は $D2$ ブレインのモジュライ空間の幾何学から次のように理解できる．一般に $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の次数 (a,b) をもつ曲線の種数は $g = (a-1)(b-1)$ で与えられ，次数 (a,b) をもつ曲線のモジュライ空間は $\mathbb{P}^{(a+1)(b+1)-1}$ となることが知られている．したがって $a = 1$ のとき曲線の種数は 0 であり，その上のファイバーは自明である．これは $j_L = 0$ 以外からの寄与がないことを意味する．また，そのモジュライ空間は $\mathbb{P}^{2n+1}$ であり，レフシェッツ分解の j_R スピンは確かに $n + 1/2$ である．

Nekrasov 分配関数の２インスタントン部分の $SU(2)_L \times SU(2)_R$ レフシェッツ分解を計算すると

$$\bigoplus_{(j_L,j_R)} N_{2B+kF}^{(j_L,j_R)} (j_L, j_R) = \bigoplus_{\ell=1}^{k} \bigoplus_{m=1}^{k-\ell+1} \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \left(\frac{\ell-1}{2}, \frac{3\ell+2m}{2} \right) \ .$$

となる．巻きつき数 k が小さい場合に具体的に書き下すと

$$
\begin{aligned}
&k=1:(0,\frac{5}{2})\\
&k=2:(\frac{1}{2},4)\oplus(0,\frac{7}{2})\oplus(0,\frac{5}{2})\\
&k=3:(1,\frac{11}{2})\oplus(\frac{1}{2},5)\oplus(\frac{1}{2},4)\oplus 2(0,\frac{9}{2})\oplus(0,\frac{7}{2})\oplus(0,\frac{5}{2})\\
&k=4:(\frac{3}{2},7)\oplus(1,\frac{13}{2})\oplus(1,\frac{11}{2})\oplus 2(\frac{1}{2},6)\oplus(\frac{1}{2},5)\oplus(\frac{1}{2},4)\oplus 2(0,\frac{11}{2})\oplus 2(0,\frac{9}{2})\oplus(0,\frac{7}{2})\oplus(0,\frac{5}{2})
\end{aligned}
$$

巻きつき数 k を固定するとき j_L が最大となるのは $((k-1)/2,(3k+2)/2)$ である．これも $D2$ ブレインのモジュライ空間の幾何学から次のように理解できる．すなわち，次数 $(2,k)$ をもつ曲線は generic な種数は $k-1$ であり，そのモジュライ空間は $\mathbb{P}^{3k+2}$ である．したがって generic なファイバーは T^{2k-2} であり，これが最大スピン $(k-1)/2$ を与える．さらに対応する j_R のスピンは $\mathcal{M}_{2B+kF}=\mathbb{P}^{3k+2}$ のレフシェッツ分解に一致している．なおレフシェッツ分解の subleading 部分は 2 サイクルのより低い種数をもつ曲線への縮退に対応していると期待される．

Nekrasov 分配関数の 3 インスタントン部分はさらに複雑であるが $(0,7/2),(1,11/2),(2,15/2),\cdots$ を含むことが確認できる．これらもまた $D2$ ブレインのモジュライ空間の幾何学と整合的である．

参考文献

[1] M. Bershadsly, S. Ceccoti, H. Ooguri and C. Vafa, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311-428, `hep-th/9309140`.

[2] R. Gopakumar and C. Vafa, `hep-th/9802016`, `hep-th/9809187`, `hep-th/9811131`, `hep-th/9812127`

[3] K. Hori *et.al.*, *Mirror Symmetry*, AMS (2003).

---

[4] H. Awata and H. Kanno, "Instanton counting, Macdonald functions and the moduli space of D-branes," JHEP **05** (2005), 039 [arXiv:hep-th/0502061 [hep-th]].

[5] 菅野・佐古　位相的弦理論と重力・ゲージ理論対応，Seminar on Mathematical Sciences No.32 Keio Univ. (2005)

[6] 菅野浩明　位相的弦理論の分配関数と数え上げ　2006 年原子核三者若手夏の学校講義録 https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ sansha.wakate/particle/2006/SSS2006LecC.pdf

[7] 菅野浩明　位相的弦理論と平面分割の数え上げ　数理科学 2025 年 12 月