时空渐近对称性

吴小宁（中国科学院数学与系统科学研究院）

1 Newman-Penrose(NP)方程简介

1.1 NP形式基础

给定时空中的正交标架：$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$，可以定义复类光标架为

$$l := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_3),\ n := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_3),\ m := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + \sqrt{-1}e_2),\ \bar{m} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - \sqrt{-1}e_2) \quad (1)$$

称为**NP复类光标架**，满足

$$\begin{aligned} &g(l,l) = g(n,n) = g(m,m) = g(l,m) = g(n,m) = 0, \\ &g(l,n) = -1, g(m,\bar{m}) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

定义**NP复联络系数**为

$$\begin{array}{ccccc} & m^a\nabla l_a & n^a\nabla l_a & \bar{m}^a\nabla m_a & \bar{m}^a\nabla n_a \\ D & -\kappa & -(\varepsilon+\bar{\varepsilon}) & \varepsilon-\bar{\varepsilon} & \pi \\ \Delta & -\tau & -(\gamma+\bar{\gamma}) & \gamma-\bar{\gamma} & \nu \\ \delta & -\sigma & -(\bar{\alpha}+\beta) & (\alpha-\bar{\beta}) & \mu \\ \bar{\delta} & -\rho & -(\alpha+\bar{\beta}) & \alpha-\bar{\beta} & \lambda \end{array} \quad (3)$$

由黎曼曲率张量的分解公式：

$$\begin{aligned} &R_{abcd} = C_{abcd} + E_{abcd} + G_{abcd}, \quad (4) \\ &E_{abcd} = \frac{1}{2}(g_{ac}S_{bd} + g_{bd}S_{ac} - g_{ad}S_{bc} - g_{bc}S_{ad}) \\ &S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab} \\ &G_{acd} = \frac{R}{12}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \end{aligned}$$

定义黎曼曲率张量的各独立分量为

$$\begin{aligned} &\Psi_0 := C_{abcd}l^am^bl^am^d,\ \Psi_1 := C_{abcd}l^an^bl^cm^d,\ \Psi_2 := \frac{1}{2}C_{abcd}l^an^b(l^cn^d - m^c\bar{m}^d) \\ &\Psi_3 := C_{abcd}n^al^bn^c\bar{m}^d,\ \Psi_4 := C_{abcd}n^a\bar{m}^bn^c\bar{m}^d \\ &\Phi_{00} := \frac{1}{2}S_{ab}l^al^b,\ \Psi_{01} := \frac{1}{2}S_{ab}l^am^b,\ \Psi_{02} := \frac{1}{2}S_{ab}m^am^b, \\ &\Psi_{11} := \frac{1}{4}S_{ab}(l^an^b + m^a\bar{m}^b),\ \Psi_{12} := \frac{1}{2}S_{ab}n^am^b,\ \Psi_{22} := \frac{1}{2}S_{ab}n^an^b \\ &\Lambda := \frac{R}{24} \end{aligned} \quad (5)$$

考虑如下三组方程：

1. 无挠条件：$[E_\mu, E_\nu] = E_\mu^a\nabla_aE_\nu^b - E_\nu^a\nabla_aE_\mu^b$，其中$E_\mu^a$代表NP复类光标架中各个向量。

2. Cartan结构方程：$d\omega + \omega\wedge\omega = \Omega$

3. Bianchi恒等式：$\nabla_{[f}R_{ab]cd} = 0$

定义导数算子：$D := l^a\nabla_a$，$\Delta := n^a\nabla_a$，$\delta := m^a\nabla_a$，$\bar{\delta} := \bar{m}^a\nabla_a$。取上述各张量方程的全体独立类光标架分量，得到**NP方程组**，具体方程形式见[1]。

1.2 Weyl曲率的Petrov分类

考虑Weyl曲率的对称性，我们可以把Weyl曲率C_{abcb}看成Λ^2空间上的零迹对称矩阵，对于一个对称矩阵，我们总可以求它的特征根。可以证明，Weyl曲率与特征根相对应的特征向量总可以写成$l \wedge v$，其中l为一个类光向量，v是一个与l垂直的空间向量，v实际只有两维。这样的类光向量称为Weyl曲率的特征类光向量。可以证明，在任意时空点，Weyl曲率都有4个特征根（可重）。则特征类根无非以下几种可能性：

1. 全部4个特征根彼此不重，称为**Petrov I 型**。
2. 4个特征根中，有一个是2重的，称为**Petrov II 型**。
3. 4个特征根两两相重，称为**Petrov D 型**
4. 4个特征根有一个是3重的，称为**Petrov III 型**

5。4个特征根全部重复，称为**Petrov N 型**

6。4个特征根均为零，即Weyl曲率为零，称为**Petrov O 型**

以上Petrov I 型也称为**代数一般**，其余5类统称为**代数特殊**

定理：（Petrov类的判定）见附图[1]

2 渐近平坦时空的定义

定义：（[2],[3],[4],[5]）

设(M, g_{ab})为Einstein方程的解，若(M, g_{ab})称为类光和类空方向为**渐近平坦**，如果其满足如下要求：

1. 存在洛伦兹流形$(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$，$M \subset \tilde{M}$ 是开集；
2. 存在点$i^0 \in \tilde{M}$，使得$\partial M = i^0 \cup \partial(\overline{J^+(i^0)}) \cup \partial(\overline{J^-(i^0)})$；
3. 记$\mathcal{I}^+ := \partial(J^+(i^0)) - \{i^0\}$称为时空$M$的**未来类光无穷远**；记$\mathcal{I}^- := \partial(J^-(i^0)) - \{i^0\}$称为时空$M$的**过去类光无穷远**；点$i^0$称为时空$M$的**类空无穷远点**。
4. 在$\bar{M}$上，存在函数$\Omega \geq 0$，$\Omega|_{\partial M} = 0$，$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$，$\tilde{g}_{ab}$可以至少1阶光滑的延拓到$\bar{M} - \{i^0\}$上，$d\Omega|_{\partial M - i^0} \neq 0$，$\lim_{x \to i^0} d\Omega = 0$，$\lim_{x \to i^0} \tilde{g}_{ab}$依方向存在，$\lim_{x \to i^0} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega = 2\tilde{g}_{ab}$。
5. 其他条件。

（由于课时所限，本课程主要集中于类光渐近无穷远的性质）

例1：Minkowski时空

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{6}$$

取坐标变换

$$u = t + r, \quad v = t - r \tag{7}$$

得到度规表达式为

$$ds^2 = -dudv + \frac{(v-u)^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{8}$$

注意到u,v为内行外行类光测地线的仿射参数，取压缩变换

$$\begin{aligned}
&U=\arctan(u), \quad V=\arctan(v), \quad v\geq u;\\
&(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\\
&T=V+U, \quad R=V-U
\end{aligned} \tag{9}$$

得到闵氏度规在(V,U)坐标下为

$$ds^2=\frac{1}{4\cos^2V\cos^2U}[-dT^2+dR^2+\sin^2R(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)] \tag{10}$$

$\tilde{M}$对应的坐标区域为$T+R\in(-\pi,\pi)$，$T-R\in(-\pi,\pi)$以及$R\geq0$。在此区域上，

$$d\tilde{s}^2=-dT^2+dR^2+\sin^2R(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \quad \Omega=2|\cos V\cos U| \tag{11}$$

共形边界由两段构成，$\mathcal{I}^+=\{T+R=\pi\}\cap\{R\geq0\}$和$\mathcal{I}^-=\{T-R=-\pi\}\cap\{R\geq0\}$。$\mathcal{I}^+$称为未来类光无穷远（闵氏时空中所有未来指向的外行类光测地线均终止于$\mathcal{I}^+$），$\mathcal{I}^-$称为过去类光无穷远（闵氏时空中所有过去指向的外行类光测地线均终止于$\mathcal{I}^-$），点$(T=0,R=\pi)$ 记为i^0，是$\mathcal{I}^+$与$\mathcal{I}^-$的交点（外行类空测地线均终止于该点），称为类空无穷远。显然$\Omega|_{\mathcal{I}^+}=0$，$\Omega|_{\mathcal{I}^-}=0$，但在边界处$d\Omega$为类光向量且不为零；在$i^0$处$\Omega$，$d\Omega$均为零，$\partial_a\partial_b\Omega$不为零。

例2：史瓦西时空

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{12}$$

对于超前与滞后Eddington坐标，

$$\begin{aligned}
&u_+=t+r_*, \quad R_+=r, \qquad du_+=dt+\frac{dr}{1-\frac{2M}{r}},\\
&u_-=t-r_*, \quad R_-=r, \qquad du_-=dt-\frac{dr}{1-\frac{2M}{r}},\\
&dr_*=\frac{dr}{1-\frac{2M}{r}}
\end{aligned} \tag{13}$$

可以取$\Omega=\frac{1}{r}$，得到

$$d\tilde{s}^2=-(\Omega^2-2M\Omega)du^2\pm2d\Omega du+d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{14}$$

分别定义出Schwarzschild时空的$\mathcal{I}^+$与$\mathcal{I}^-$。

在上述两个例子中，我们注意到r都是外行径向类光测地线的仿射参数，且有$\Omega\sim1/r$，这两个性质我们后面可以证明，是渐近平坦时空中类光无穷远附

近的一般性质。

$\tilde{M}$时空与M时空的关联：

1. $\tilde{g} = \Omega^2 g$

2. 类光测地线的像是共形不变的，但是其对应的仿射参数不是，$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\lambda} = \alpha\Omega^2$，$\alpha \in \mathbf{R}^+$

2. $\tilde{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d$

3. 对于电磁场，有$\tilde{F}_{ab} = F_{ab}$，即电磁场方程有共形不变性。

4. 标量场方程，$n = dim(M)$，

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{(n-2)R}{4(n-1)}\phi = 0 \tag{15}$$

在变换$\tilde{\phi} = \Omega^s\phi$之下是共形不变的。

问题：

1. 渐近平坦时空是否充分多？

2. 哪些自由度可以刻画渐近平坦时空在渐近区的性质？

3. 在时空的渐近平坦区，是否可以引入渐近对称性，该对称性与闵氏时空中的Poincare对称性有何关系？

4. 渐近平坦区的渐近对称性与时空整体守恒量的关系是否仍有类似Noether定理的关系？

……

要回答上述问题，我们需要比较一般的讨论所有满足类光渐近平坦性质的时空（为简单起见，本课程中只讨论真空Einstein情况），方法有两种：

1. 共形几何方法，即求解共形Einstein方程，比如[8]，[9]，[12]。

2. 在物理时空，求解Einstein方程，该方法最早由R. Penrose和E. T. Newman于1962年引入[6]（活动标架法在广义相对论中的应用），本课程主要采用这种方法。该方法比较直观，将渐近平坦时空时空写在类似Eddington坐标之下，模仿闵氏时空和史瓦西时空的经验，要求度规的形式为

$$ds^2 = -du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + O(1/r) \tag{16}$$

3 类光无穷远附近的坐标选取——Newman-Unti规范

由于Einstein方程是张量方程，存在坐标协变性，我们必须确定所使用的坐标，这样才能最终定解。

记$\mathcal{I}^+$为共形定义的类光无限远，由定义可知，$\mathcal{I}^+$是一个光锥，记$\tilde{n}^a$为$\mathcal{I}^+$的母线切向量，显然，$\tilde{n}^a$为实类光向量，取S为$\mathcal{I}^+$的类空截面，有$S \simeq S^2$，在S上引入球坐标(θ,φ)，记$\tilde{q}_{ab}$为$\tilde{g}$在S上诱导的度规，显然有$\tilde{q}_{ab} = \omega^2 q^0_{ab}$，其中$q^0_{ab}$为标准球面上的度规。显然，$S$上每一点都有一个$\tilde{n}^a$（注意，选定$S$后，$\tilde{n}^a(\theta,\varphi)$仍有相当的自由性，原因是$\tilde{n}$类光，无法归一长度）。考虑从$(\theta,\varphi)$点出发的$\mathcal{I}^+$的母线$\gamma(\tilde{u})$，$\tilde{u}$为相关的仿射参数，且设定$\tilde{u}(S) = 0$，定义$(\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$坐标

沿γ不变，则我们得到了$\mathcal{I}^+$上的一组坐标$(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$。取$(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$为$S(\tilde{u})$上一组正交标架，显然可以保证$\mathcal{L}_{\tilde{n}}\tilde{e}_A\propto\tilde{e}_A$，则得到每一个$S_u$上的一组正交标架，即$\mathcal{I}^+$上每一点均有坐标$(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$和标架$(\tilde{n},\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$，利用正交条件

$$\begin{aligned}&\tilde{g}(\tilde{l}.\tilde{n})=-1,\ \tilde{g}(\tilde{l},\tilde{l})=\tilde{g}(\tilde{n},\tilde{n})=0,\ \tilde{g}(\tilde{l},\tilde{e}_A)=\tilde{g}(\tilde{n},\tilde{e}_A)=0,\\&\tilde{g}(\tilde{e}_A,\tilde{e}_B)=\delta_{AB}\ A,B=1,2\end{aligned}\tag{17}$$

则在$\mathcal{I}^+$上每一点，均可唯一确定一个新的类光向量$\tilde{l}$，$\tilde{l}$不属于$\mathcal{I}^+$的切空间。从$\mathcal{I}^+$上每一点，以$\tilde{l}$为初始切方向，可以唯一确定一条关于$\tilde{g}$的类光测地线，相应的仿射参数为$\tilde{r}$，不失一般性，可以要求$\tilde{r}(\mathcal{I}^+)=0$，定义$(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$沿$\tilde{l}$的类光测地线不变，并且将标架$(\tilde{l},\tilde{n},\tilde{e}_A)$沿$\tilde{l}$方向关于$\tilde{\nabla}$平移，则我们在$\mathcal{I}^+$附近建立了坐标$(\tilde{u},\tilde{r},\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$，且选定了类光标架$(\tilde{l},\tilde{n},\tilde{e}_A)$。

由于我们希望在物理时空求解爱因斯坦方程，因此我们要将上述结果联系于物理时空中的坐标与标架，因为$\tilde{g}_{ab}=\Omega^2g_{ab}$，而类光标架拼出的是逆度规，即

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{ab}&=-\tilde{l}^a\tilde{n}^b-\tilde{n}^a\tilde{l}^b+\tilde{e}^a_1\tilde{e}^b_1+\tilde{e}^a_2\tilde{e}^b_2\\&=-\tilde{l}^a\tilde{n}^b-\tilde{n}^a\tilde{l}^b+\tilde{m}^a_1\bar{\tilde{m}}^b_1+\bar{\tilde{m}}^a_2\tilde{m}^b_2\\\tilde{m}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{e}_1+\sqrt{-1}\tilde{e}_2)\end{aligned}\tag{18}$$

则可建立如下联系

$$\begin{aligned}&\tilde{g}^{ab}=\frac{1}{\Omega^2}g^{ab},\quad \tilde{q}^{ab}=\frac{1}{\Omega^2}q^{ab},\\&\tilde{r}=\frac{1}{r},\ \tilde{u}=u,\ \tilde{\theta}=\theta,\ \tilde{\varphi}=\varphi,\\&\tilde{l}^a=\frac{1}{\Omega^2}l^a,\ \tilde{n}^a=n^a,\ \tilde{e}^a_A=\frac{1}{\Omega}e^a_A,\\&\Omega\sim\frac{1}{r}\end{aligned}\tag{19}$$

且直接计算可以证明，$(\tilde{l},\tilde{n},\tilde{e}_A)$沿$\tilde{l}$的平移条件对应于$(l,n,e_A)$沿$l$平移。进一步引入NP标架，

$$m^a=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+\sqrt{-1}\ e_2)\tag{20}$$

这样在坐标(u,r,θ,φ)之下，上述类光标架可以表达为

$$l^a=\partial_r,\ n^a=\partial_u+U\partial_r+X^A\partial_A,\ m^a=\omega\partial_r+\xi^B\partial_B\tag{21}$$

其中U、X^A、ω、ξ^A为物理时空中的待求函数。利用度规与标架的联系

$$g^{\mu\nu}=-l^\mu n^\nu-n^\mu l^\nu+m^\mu\bar{m}^\nu+\bar{m}^\mu m^\nu\tag{22}$$

进一步得到

$$(g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&2(U-|\omega|^2)&X-(\bar{\omega}\xi^1+\omega\bar{\xi}^2)&\bar{X}-(\omega\bar{\xi}^1+\bar{\omega}\xi^2)\\0&X-(\bar{\omega}\xi^1+\omega\bar{\xi}^2)&-2|\xi^1|^2&-\xi^1\bar{\xi}^2+\bar{\xi}^1\xi^2)\\0&\bar{X}-(\omega\bar{\xi}^1+\bar{\omega}\xi^2)&-\xi^1\bar{\xi}^2+\bar{\xi}^1\xi^2)&-2|\xi^2|^2\end{pmatrix}\tag{23}$$

利用平移规范条件：

$$\kappa = \varepsilon = \pi = 0,\ Im(\rho) = 0,\ \tau = \bar{\alpha} + \beta \tag{24}$$

得到真空条件下NP方程的简化：

1. 标架方程：

1) ∂_r分量

$$\begin{aligned} DU &= \tau\bar{\omega} + \bar{\tau}\omega - \gamma - \bar{\gamma}, \\ D\omega &= \rho\omega + \sigma\bar{\omega} - \bar{\alpha} - \beta, \\ \Delta\omega - \delta U &= \bar{\nu} - (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\omega - \bar{\lambda}\bar{\omega}, \\ \delta\bar{\omega} - \bar{\delta}\omega &= \mu - \bar{\mu} + (\bar{\beta} - \alpha)\omega + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\omega}. \end{aligned} \tag{25}$$

2）∂_θ分量

$$\begin{aligned} DX^2 &= \bar{\tau}\xi^2 + \tau\overline{\xi^2}, \\ D\xi^2 &= \rho\xi^2 + \sigma\overline{\xi^2}, \\ \delta X^2 - \Delta\xi^2 &= (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\xi^2 + \bar{\lambda}\overline{\xi^2}, \\ \delta\overline{\xi^2} - \bar{\delta}\xi^2 &= (\bar{\beta} - \alpha)\xi^2 + (\bar{\alpha} - \beta)\overline{\xi^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

3) ∂_φ分量

$$\begin{aligned} DX^3 &= \bar{\tau}\xi^3 + \tau\overline{\xi^3}, \\ D\xi^3 &= \rho\xi^3 + \sigma\overline{\xi^3}, \\ \delta X^3 - \Delta\xi^3 &= (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\xi^3 + \bar{\lambda}\overline{\xi^3}, \\ \delta\overline{\xi^3} - \bar{\delta}\xi^3 &= (\bar{\beta} - \alpha)\xi^3 + (\bar{\alpha} - \beta)\overline{\xi^3}. \end{aligned} \tag{27}$$

2. 结构方程（联络系数方程）：

$$\begin{aligned}
D\lambda &= \rho\lambda + \mu\bar{\sigma}, && (28)\\
D\rho &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma}, && (29)\\
D\sigma &= 2\rho\sigma + \Psi_0, && (30)\\
D\mu &= \rho\mu + \sigma\lambda + \Psi_2, && (31)\\
D\alpha &= \alpha\rho + \beta\bar{\sigma}, && (32)\\
D\beta &= \sigma\alpha + \beta\rho + \Psi_1, && (33)\\
D\tau &= \rho\tau + \sigma\bar{\tau} + \Psi_1 \ (\tau = \bar{\alpha} + \beta), && (34)\\
D\gamma &= \alpha\tau + \beta\bar{\tau} + \Psi_2, && (35)\\
D\nu &= \mu\bar{\tau} + \lambda\tau + \Psi_3, && (36)\\
\delta\tau - \Delta\sigma &= 2\tau\beta + (\bar{\gamma} + \mu - 3\gamma)\sigma + \bar{\lambda}\rho, && (37)\\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\rho - \sigma\lambda - 2\alpha\tau - \Psi_2, && (38)\\
\delta\nu - \Delta\mu &= (\gamma + \bar{\gamma} + \mu)\mu + \lambda\bar{\lambda} - 2\beta\nu, && (39)\\
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= (\bar{\gamma} - 3\gamma - \mu - \bar{\mu})\lambda + 2\alpha\nu - \Psi_4, && (40)\\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= \rho\nu - \tau\lambda - \beta\lambda + (\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu})\alpha - \Psi_3, && (41)\\
\delta\gamma - \Delta\beta &= \mu\tau - \sigma\nu - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda}, && (42)\\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\bar{\alpha} + \beta) + (\bar{\beta} - 3\alpha)\sigma - \Psi_1, && (43)\\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3, && (44)\\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \rho\mu - \lambda\sigma - \Psi_2. && (45)
\end{aligned}$$

3. Bianchi恒等式：

$$\begin{aligned}
&D\Psi_1 - \bar{\delta}\Psi_0 = 4\rho\Psi_1 - 4\alpha\Psi_0,\\
&D\Psi_2 - \bar{\delta}\Psi_1 = 3\rho\Psi_2 - 2\alpha\Psi_1 - \lambda\Psi_0,\\
&D\Psi_3 - \bar{\delta}\Psi_2 = 2\rho\Psi_3 - 2\lambda\Psi_1,\\
&D\Psi_4 - \bar{\delta}\Psi_3 = \rho\Psi_4 + 2\alpha\Psi_3 - 3\lambda\Psi_2,\\
&\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 = 4\gamma\Psi_0 - \mu\Psi_0 - 4\tau\Psi_1 - 2\beta\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2,\\
&\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = \nu\Psi_0 + 2\gamma\Psi_1 - 2\mu\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3,\\
&\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 - 2\tau\Psi_3 + 2\beta\Psi_3 + \sigma\Psi_4,\\
&\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 = 3\nu\Psi_2 - 2\gamma\Psi_3 - 4\mu\Psi_3 - \tau\Psi_4 + 4\beta\Psi_4.
\end{aligned} \tag{46}$$

3.1 Peeling-off性质：Weyl曲率的衰减速度

因为Weyl曲率满足共形关系

$$\tilde{C}_{abc}{}^{d} = C_{abc}{}^{d} \tag{47}$$

且度规$\tilde{g}$在边界处充分正则，则$\tilde{\Psi}_n$均为正则函数，利用非物理标架与物理标架的关系，得到物理时空中Weyl曲率的类光标架分量为

$$\Psi_n = \Omega^{4-n}\tilde{\Psi}_n, \ n = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{48}$$

考虑时空是渐近平坦的，闵氏空间的共形紧致化有$\tilde{C}_{abc}{}^d=0$，因而若M满足共形意义下的渐近平坦定义，则应该有$\lim_{x\to\mathcal{I}^+}\tilde{C}_{abc}{}^d=0$，在共形空间中，我们用$\Omega$来标记几何量在边界附近趋于零的速度，如果假设$\tilde{\Psi}_n$在共形边界附近充分光滑，则由泰勒展开可知，$\tilde{\Psi}_n\sim\Omega$，因此有

$$\Psi_n\sim O(r^{n-5}),\quad n=0,1,2,3,4 \tag{49}$$

上式即为著名的**Penrose Peeling off性质**。

类似的，如果是Einstein-Maxwell情况，同样可以分析出电磁场分量的Peeling性质为：$\Phi_n=O(r^{n-3})$，$n=0,1,2$。

3.2 渐近平坦条件给出的边界条件

解析性假设：任何NP几何量在上述坐标下均可展开为$1/r$的级数。

因为度规的形式为（16）式，我们得到标架分量的渐近条件为

$$\begin{aligned}
&U=-\frac{1}{2}+O(r^{-1}),\ X\to 0,\ \omega\to 0,\ \xi^1\to O(r^{-2}),\ \xi^2=\frac{1+|z|^2}{\sqrt{2}r}+O(r^{-2}),\\
&\rho=-\frac{1}{r}+O(r^{-3}),\ \mu=-\frac{1}{2r}+O(r^{-2}),\ \alpha,-\beta=\frac{\alpha_0}{r}+O(r^{-2}),\\
&z=ctg(\theta/2)e^{i\varphi},\ \alpha_0=-\frac{ctg\theta}{2\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{50}$$

我们要从上述比较粗糙的阶数估计出发，利用曲率的衰减性质，在解析性假设的条件下，得到所有NP几何量的精确阶数。首先首先从σ开始，在闵氏时空中，$\sigma=0$，因此最一般的假设为$\sigma=\frac{a}{r}+\frac{\sigma^0}{r^2}+\cdots$，

$$\begin{aligned}
&\partial_r\rho=\rho^2+|\sigma|^2,\\
&\partial_r\sigma=2\rho\sigma+\Psi_0
\end{aligned} \tag{51}$$

事实上，上述方程就是l方向著名的Raychaudhuri方程。上述第一个方程最低阶系数给出$a=0$，第二个方程最低阶(r^{-3})平凡。两个方程的次领头阶给出

$$\begin{aligned}
&\rho=-\frac{1}{r}-\frac{|\sigma^0|^2}{r^3}++O(r^{-5}),\\
&\sigma=\frac{\sigma^0}{r^2}+(\sigma^0|\sigma^0|^2-\frac{\Psi_0^0}{2})r^{-4}+O(r^{-5})
\end{aligned} \tag{52}$$

带入方程

$$\begin{aligned}
&\partial_r\alpha=\alpha\rho+\beta\sigma,\\
&\partial_r\beta=\rho\beta+\alpha\sigma+\Psi_1
\end{aligned} \tag{53}$$

上二方程领头阶平凡，次领头阶给出$\alpha_2=\sigma^0\alpha_0$，$\beta_2=-\alpha_0\sigma^0$。利用规范条

件，$\tau=\bar{\alpha}+\beta$，得到$\tau\sim O(r^{-3})$。再将ρ，σ的高阶结果带入，得到

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\alpha_0}{r}+\frac{\bar{\sigma}^0\alpha_0}{r^2}+\frac{|\sigma^0|^2\alpha_0}{r^3}+O(r^{-4}),\\ \beta&=-\frac{\alpha_0}{r}-\frac{\bar{\sigma}^0\alpha_0}{r^2}-(|\sigma^0|^2\alpha_0+\frac{1}{2}\Psi_1^0)r^{-3}+O(r^{-4})\\ \tau&=-\frac{\Psi_1^0}{2}r^{-3}+O(r^{-4})\end{aligned}\tag{54}$$

再考虑方程

$$\partial_r\gamma=\tau\alpha+\bar{\tau}\beta+\Psi_2\tag{55}$$

领头阶方程给出

$$\gamma=-\frac{\Psi_2^0}{2r^2}+O(r^{-3})\tag{56}$$

再用方程

$$\partial_r\nu=\tau\lambda+\bar{\tau}\mu+\Psi_3\tag{57}$$

得到$\nu=-\frac{\Psi_3^0}{r}+O(r^{-2})$。考虑

$$\begin{aligned}\partial_r\lambda&=\rho\lambda+\mu\bar{\sigma},\\ \partial_r\mu&=\mu\rho+\lambda\sigma+\Psi_2,\end{aligned}\tag{58}$$

首阶方程平凡，不能确定λ_1的值。考虑方程

$$D'\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+2\alpha\nu-\Psi_4\tag{59}$$

由$D'=\partial_u-\frac{1}{2}\partial_r+O(r^{-1})$，$\delta=\frac{1}{r}\delta_0+O(r^{-2})$，得到$\partial_u\lambda_1=-\Psi_4^0$。待回到前面两个方程，得到$\lambda_2=\bar{\sigma}^0$，$\mu_2=\lambda_1\sigma^0+\Psi_2^0$。再利用方程

$$\delta\tau-D'\sigma=\mu\sigma+\bar{\lambda}\rho+(\tau+\beta-\bar{\alpha})\tau-(3\gamma-\bar{\gamma})\sigma\tag{60}$$

领头阶(r^{-2})给出$\lambda_1=\dot{\bar{\sigma}}^0$，进一步得到$\Psi_4^0=-\ddot{\bar{\sigma}}^0$。最后得到

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{\dot{\bar{\sigma}}^0}{r}+\frac{\bar{\sigma}^0}{r^2}+\left(|\sigma^0|^2\dot{\bar{\sigma}}^0+\frac{\bar{\sigma}^0\Psi_2^0}{2}\right)r^{-3}+O(r^{-4})\\ \mu&=-\frac{1}{2r}-(\sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0+\Psi_2^0)r^{-2}-\frac{|\sigma^0|^2-\Psi_2^4/2}{r^3}+O(r^{-4})\end{aligned}\tag{61}$$

再带回之前关于$\partial_r\nu$的方程，得到

$$\nu=-\frac{\Psi_3^0}{r}-\frac{\Psi_3^3}{r^2}+O(r^{-3})\tag{62}$$

至此，我们确定了各个联络系数的阶数以及领头阶项，即将全体联络系数确定到了r^{-2}阶。由方程

$$\delta\lambda-\bar{\delta}\mu=\mu(\alpha+\bar{\beta})+\lambda(\bar{\alpha}-3\beta)-\Psi_3\tag{63}$$

领头阶给出$\Psi_3^0 = \delta_0\dot{\bar{\sigma}}^0 - 4\bar{\alpha}_0\dot{\bar{\sigma}}^0$。

由于全体联络系数确定到r^{-2} 阶，现在我们可以利用无挠条件，来计算标架分量的具体值。

由方程

$$DX = -\tau\bar{\xi}^2 - \bar{\tau}\xi^1 \tag{64}$$

得到$X \sim O(r^{-3})$。再考虑方程

$$-DU = (\gamma + \bar{\gamma}) - \tau\bar{\omega} - \bar{\tau}\omega \tag{65}$$

得到$U_1 = (\gamma_2 + \bar{\gamma}_2)$。要控制函数$\Omega$，首先看无挠条件

$$(D'D - DD') = (\gamma + \bar{\gamma})D - \tau\bar{\delta} - \bar{\tau}\delta \tag{66}$$

取∂_r分量，有

$$-D\omega = (\bar{\alpha} + \beta) - \rho\omega - \sigma\bar{\omega} \tag{67}$$

首阶方程平凡，次阶方程给出

$$\omega_2 = \tau_3 - \sigma^0\bar{\omega}_1 \tag{68}$$

我们失去了对于ω_1的控制！考虑另一条无挠条件

$$\delta D' - D'\delta = -\bar{\nu}D + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta \tag{69}$$

∂_r方向首阶方程给出，

$$\dot{\omega}_1 = \bar{\nu}_1 = \bar{\delta}_0\dot{\sigma}^0 - 4\bar{\alpha}_0\dot{\sigma}^0 \tag{70}$$

得到

$$\omega = \frac{\bar{\eth}\sigma^0}{r} - (\sigma^0\eth\bar{\sigma}^0 + \Psi_1^0/2)r^{-2} + O(r^{-3}) \tag{71}$$

其中$\bar{\eth}\sigma^0 := \bar{\delta}_0\sigma^0 - 4\bar{\alpha}_0\sigma^0$，$\eth\bar{\sigma}^0 := \delta_0\bar{\sigma}^0 + 4\alpha_0\bar{\sigma}^0$

最后看方程

$$\begin{aligned} -D\xi^1 - \sigma\bar{\xi}^2 - \rho\xi^1, \\ -D\xi^2 = -\sigma\bar{\xi}^1 - \rho\xi^2 \end{aligned} \tag{72}$$

给出

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{-z(1+|z|^2)}{\bar{z}\sqrt{2}}\frac{\sigma^0}{r^2} + O(r^{-3}), \\ \xi^2 &= \frac{1+|z|^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{r} + O(r^{-3}) \end{aligned} \tag{73}$$

至此，我们获得了标架分量精确到$O(r^{-3})$的控制。最后，我们利用Bianchi恒等式，获得更多的限制。注意到，Bianchi恒等式有如下很好的结构

$$\bar{\delta}\Psi_3 - D\Psi_4 = -\rho\Psi_4 - 2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 \tag{74}$$

领头阶方程平凡，此领头阶给出

$$-\Psi_4^2 = \bar{\delta}_0\Psi_3^0 \tag{75}$$

再由

$$D\Psi_3 - \bar{\delta}\Psi_2 = 2\rho\Psi_3 - 2\lambda\Psi_1 \tag{76}$$

领头阶平凡，次领头阶$\Psi_3^3 = -\Psi_2^0/3$。再由

$$-D\Psi_4 + \bar{\delta}\Psi_3 = -\rho\Psi_4 - 2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 \tag{77}$$

得到Ψ_4^2可由Ψ_3^0得到，Ψ_4^3可由Ψ_3^3得到。另外从Bianchi恒等式还可以得到

$$\Psi_2^0 - \bar{\Psi}_2^0 = \underline{\partial}^2\sigma^0 - \bar{\underline{\partial}}^2\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0\dot{\sigma}^0 - \sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0 \tag{78}$$

最后得到，所有标架分量、联络系数、Weyl曲率的各阶泰勒系数，均可以用$\sigma^0(u,\theta,\varphi)$，$Re(\Psi_2^0(0,\theta,\varphi))$，$\Psi_1^0(0,\theta,\varphi)$和$\Psi_0^k(0,\theta,\varphi)$ 最终确定（可能要解u方向的常微分方程），因而我们得到类光无穷远附近的自由度就由上述函数集决定，所得到的度规形式称为类光无穷远附近满足**Newman-Unti 规范**。其中$\dot{\sigma}^0$即为时空的**News-function**，$Re(\Psi_2^0)$与时空Bondi质量相关，Ψ_1^0确定时空的初始角动量，在稳态条件下，Ψ_0^k联系于时空多极矩（参考[13]）

4 类光无穷远处的渐近对称性

渐近Killing向量：若(M, g_{ab})是渐近平坦时空，将该时空写在NU标准坐标之下，k^a为时空中向量场，满足

1. $\lim_{x\to\mathcal{I}^+} k^a \in T(\mathcal{I}^+)$
2. $\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} \sim O(g_{\mu\nu})$，即李导数不改变度规的渐近速度

则称k^a为该渐近平坦时空的**渐近Killing向量场**。

度规分量的渐近形式，

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1-\frac{2U_1}{r}+\cdots,\\
g_{01} &= 1,\\
g_{02} &= \big(-\frac{\omega_1+\bar{\omega}_1}{\sqrt{2}}\big)+\cdots,\\
g_{03} &= \big(-\frac{i(\omega_1-\bar{\omega}_1)}{\sqrt{2}}\sin\theta\big)+\cdots,\\
g_{11} &= 0,\\
g_{12} &= 0,\\
g_{13} &= 0,\\
g_{22} &= -r^2+\sqrt{2}(\xi_2^\theta+\bar{\xi}_2^\theta)r+\cdots,\\
g_{23} &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Big(i\bar{\xi}_2^\theta-i\xi_2^\theta+\sin\theta(\xi_2^\phi+\bar{\xi}_2^\phi)\Big)r+\cdots,\\
g_{33} &= -r^2\sin^2\theta-i\sqrt{2}\sin^3\theta(\xi_2^\phi-\bar{\xi}_2^\phi)r+\cdots,
\end{aligned}
\tag{79}
$$

渐近Killing方程的坐标形式

$$
\mathcal{L}_\xi g_{ab}=\xi^c\partial_c g_{ab}+g_{bc}\partial_a\xi^c+g_{ac}\partial_b\xi^c\sim O(g_{ab})
\tag{80}
$$

渐近Killing场的渐近行为假设：

$$
\begin{aligned}
\xi^u &= \xi_0^u+\frac{\xi_1^u}{r}+\frac{\xi_2^u}{r^2}+\cdots,\\
\xi^r &= \xi_{-1}^r r+\xi_0^r+\frac{\xi_1^r}{r}+\cdots,\\
\xi^\theta &= \xi_0^\theta+\frac{\xi_1^\theta}{r}+\frac{\xi_2^\theta}{r^2}+\cdots,\\
\xi^\phi &= \xi_0^\phi+\frac{\xi_1^\phi}{r}+\frac{\xi_2^\phi}{r^2}+\cdots,
\end{aligned}
\tag{81}
$$

其中$\xi_i^\mu=\xi_{i,0}^\mu(u,\theta,\phi)+\xi_{i,1}^\mu(u,\theta,\phi)\ln r$。

依照定义，求解渐近Killing方程，得到

(i) $\mathcal{L}_\xi g_{uu}=O(\frac{1}{r})$ 给出

$$
r\ \ order\Rightarrow\frac{\partial\xi_{-1}^r}{\partial u}=0.
\tag{82}
$$

$$
r^0\ \ order\Rightarrow\frac{\partial\xi_0^r}{\partial u}+\frac{\partial\xi_0^u}{\partial u}=0.
\tag{83}
$$

(ii) $\mathcal{L}_\xi g_{ur}=0$ 给出

$$
r^0\ \ order\Rightarrow\xi_{-1}^r+\frac{\partial\xi_0^u}{\partial u}=0.
\tag{84}
$$

(iii) $\mathcal{L}_\xi g_{u\theta} = O(1)$ 给出

$$r^2 \quad order \Rightarrow \frac{\partial \xi_0^\theta}{\partial u} = 0. \tag{85}$$

$$r \quad order \Rightarrow \frac{\partial \xi_{-1}^r}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi_1^\theta}{\partial u} = 0. \tag{86}$$

(iv) $\mathcal{L}_\xi g_{u\phi} = O(1)$ 给出

$$r^2 \quad order :\Rightarrow \frac{\partial \xi_0^\phi}{\partial u} = 0. \tag{87}$$

$$r \quad order \Rightarrow \frac{\partial \xi_{-1}^r}{\partial \phi} - \sin^2\theta \frac{\partial \xi_1^\phi}{\partial u} = 0. \tag{88}$$

(v) $\mathcal{L}_\xi g_{rr} = 0$ 给出

$$r^{-2} \quad order \Rightarrow \xi_1^u = 0. \tag{89}$$

(vi) $\mathcal{L}_\xi g_{r\theta} = 0$ 给出

$$r^0 \quad order \Rightarrow \xi_1^\theta + \frac{\partial \xi_0^u}{\partial \theta} = 0. \tag{90}$$

(vii) $\mathcal{L}_\xi g_{r\phi} = 0$ 给出

$$r^0 \quad order \Rightarrow \sin^2\theta \xi_1^\phi + \frac{\partial \xi_0^u}{\partial \phi} = 0. \tag{91}$$

(viii) $\mathcal{L}_\xi g_{\theta\theta} = O(r)$ 给出

$$r^2 \quad order \Rightarrow \xi_{-1}^r + \frac{\partial \xi_0^\theta}{\partial \theta} = 0. \tag{92}$$

(ix) $\mathcal{L}_\xi g_{\theta\phi} = O(r)$ 给出

$$r^2 \quad order \Rightarrow \frac{\partial \xi_0^\theta}{\partial \phi} + \sin^2\theta \frac{\partial \xi_0^\phi}{\partial \theta} = 0. \tag{93}$$

(x) $\mathcal{L}_\xi g_{\phi\phi} = O(r)$ 给出

$$r^2 \quad order \Rightarrow \xi_{-1}^r + \cot\theta \xi_0^\theta + \frac{\partial \xi_0^\phi}{\partial \phi} = 0. \tag{94}$$

记$Y^A=\xi_0^\theta(\frac{\partial}{\partial\theta})^A+\xi_0^\phi(\frac{\partial}{\partial\phi})^A$，易见

$$D_AY^A=\partial_\theta Y^\theta+\cot\theta Y^\theta+\partial_\phi Y^\phi. \tag{95}$$

从(94)，(92)两方程，得到

$$2\xi_{-1}^r+D_AY^A=0, \tag{96}$$

进一步，方程(84) 给出

$$\xi_0^u=f(\theta,\phi)+\frac{1}{2}(D_AY^A)u. \tag{97}$$

总结前述所有结果，得到

$$\begin{aligned}\xi^u=&f(\theta,\phi)+\frac{1}{2}(D_AY^A)u+\cdots,\\ \xi^r=&-\frac{1}{2}(D_AY^A)\ r+\cdots,\\ \xi^\theta=&Y^\theta+\cdots,\\ \xi^\phi=&Y^\phi+\cdots.\end{aligned} \tag{98}$$

其中$f(\theta,\varphi)$是两维球面上任意函数，D_A是两维球面上的标准导数。记q_{AB}^0标准两维球面上度规，向量场Y^A是两维球面内部向量场且满足

$$\mathcal{L}_Yq_{AB}^0=\frac{1}{2}(D_CY^C)q_{AB}^0, \tag{99}$$

我们定义渐近Killing场的等价类，即k_1，k_2均为渐近Killing向量，$k_1\sim k_2$如果$f_1(\theta,\varphi)=f_2(\theta,\varphi)$，$Y_1^A=Y_2^A$，即两个向量的领头阶相同。直接计算表明，上述等价类在向量场对易括号下构成Lie代数，称为**BMS 代数**，对应代数结构为$\mathcal{BMS}=L^2(S_0^2)\oplus_S\mathcal{L}_p$。很明显，$Y^A$所代表的等价类对应于单位球面上的共形Killing场，已知其同构于洛仑兹李代数$\mathcal{L}_p$。（洛仑兹群在单位球面的作用，光行差公式）$f(\theta,\varphi)$为$\mathcal{BMS}$的交换理想，称为**超平移**子代数。因为$f\in L^2(S_0^2)$，我们可以选取球谐函数作为该函数空间的一组基，$\forall f\in L^2(S_0^2)$，有$f=\sum_{l,m}a_{lm}Y_{lm}$。其中有4维子空间$T^4=span\{Y_{00},Y_{1.m}\}$在洛伦兹作用下不变，称为**平移**子代数。(直观图像，将闵氏时空中的Poincare代数的生成元，用Eddington坐标表达，平移部分在类光无穷远处的极限直接给出上述子空间)

因为平移子空间是代数不变子空间，利用Wald Formulism，可以直接导出与平移相对应的守恒量，即著名的Bondi质量与Bondi动量，具体参考[13]。选择转动向量场，形式上也可以利用Wald formulism 得到相应的"角动量"(具体表达式就是所取向量场的Kommar积分)，但问题是转动子代数没有正规性，选取不同的转动向量场，得到不同的角动量定义。

Bondi能量

$$M_B=-\frac{1}{8\pi}\int_{S_\infty}(\Psi_2^0+\sigma^0\dot{\bar\sigma}^0+C.C) \tag{100}$$

Bondi energy loss formula

$$\frac{dM_B}{du} = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} |\ddot{\sigma}|^2 \tag{101}$$

角动量

$$J(Y) = \frac{1}{16\pi}\int_{S_\infty} (\Psi_1^0 Y^{\bar{m}} + \bar{\Psi}_1^0 Y^m) \tag{102}$$

丘成桐教授的新角动量定义（Chen, Wang, Wang, Yau, arxiv : 2102.03235），一定程度上克服了角动量定义中的超平移不确定性。

引力痕迹效应（Memory Effect）

1. 质量的引力痕迹效应：由Bianchi恒等式的首阶方程，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\Psi_2^0 + \sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0) &= \dot{\Psi}_2^0 + |\dot{\sigma}^0|^2 + \sigma^0\ddot{\bar{\sigma}}^0 \\ &= \underline{\partial}\Psi_3^0 + \sigma^0\Psi_4^0 + +|\dot{\sigma}^0|^2 + \sigma^0\ddot{\bar{\sigma}}^0 \\ &= -\underline{\partial}^2\dot{\bar{\sigma}}^0 + |\dot{\sigma}^0|^2 \end{aligned} \tag{103}$$

沿u方向积分，得到

$$\underline{\partial}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^1 du = \left(\underline{\partial}^2\bar{\sigma}^0\right)_{-\infty}^{+\infty} = -\left(\Psi_2^0 + \sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0\right)_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{\sigma}^0|du \tag{104}$$

这意味着无穷远处惯性观测者（$Z^a \sim \partial_u$）的位置变化总量由该方向上的能量总变化值决定。（上结果可以有两种理解方式：一，直接计算表明，在类光无穷远附近，∂_u近似为类时测地线，该线汇的shear近似为λ^1；二，在类光无穷远附近，σ^0是球面诱导度规的次领头阶项系数。）

2. 角动量的引力痕迹效应：考虑类光无穷远附近的类时测地线汇，该线汇的时间延迟效应（time delay effect）

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^2\delta T &= \left[\frac{1}{2}\bar{\underline{\partial}}\Psi_1^0 + \frac{1}{2}\underline{\partial}\bar{\Psi}_1^0 + |\bar{\underline{\partial}}\sigma^0|^2\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma^0\bar{\underline{\partial}}\underline{\partial}\bar{\sigma} + C.C)du \end{aligned} \tag{105}$$

5 类光无穷远结构的新进展

近年来，特征初值技术的进步，对于时空类光无穷远附近结构的认识也有了长足的进步：

1. 放弃解析性假设：非解析的无穷远存在性，参考[11]，[12]，[14]。

2. 放弃Weyl曲率的Peeling性质以及共形定义：我们注意到，Peeling性质在我们上述的计算中起到至关重要的作用，$O(r^{n-5})$的衰减行为中，$O(r^{n-4})$是直接从共形定义而来，另外一阶来自类光无穷远处的光滑性假设。反之，如

果Weyl曲率的衰减连$O(r^{n-4})$都不能保证，则该时空流形没有共形紧致化，即该流形不是传统定义的渐近平坦时空。

放弃的动机：我们知道，广义相对论的初值问题可以用3+1分解来描述，而初值的渐近平坦性是有严格数学定义并且不依赖于共形结构，一个尖锐的问题是：从渐近平坦初值经哈密顿演化最终得到的时空，是不是传统共形渐近平坦的？物理上的直觉显然应该是肯定的，但是近年来的研究发现并非如此。

Peeling性质的破坏：多重齐次时空，展开并非只是$1/r$的级数，还包含$\ln r$。计算发现，在该类时空中，$\Psi_0 \sim O(r^{-3})$，这显然破坏了共形结构的存在性[13]。从渐近平坦初值演化出多重齐次时空的例子也已经找到，这提示我们共形渐近平坦的定义可能过于狭窄了，相关综述见[15]。

推广后的BMS对称性，在多重齐次时空中，BMS渐近对称性依然可能被保留[13]。

References

[1] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Second Edition), Cambridge University Press, 2003.

[2] 梁灿彬，周彬，《微分几何与广义相对论》（第二版）（中册），科学出版社，2009

[3] R. M. Wald, *General Relativity*，Chicago University Press，1987.

[4] R. Penrose and W. Rindle, *Spinors and Space-time*, Vol.2, Cambridge Univer- sity Press, 1984.

[5] J. Stewart, *Advanced General Relativity*, Cambridge University Press, 1990.

[6] E. T. Newman and R. Penrose, "An approach to gravitational radiation by a method of spin coeficients", J. Math. Phys. 3 (1962) 566.

[7] H. Friedrich, "On the regular and the asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations", Proc. R. Soc. Lond. A 375 (1981) 169.

[8] H. Friedrich, "The asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations as an initial value problem for a first order quasi-linear symmetric hyperbolic system", Proc. R. Soc. Lond. A 378 (1981) 401.

[9] H. Friedrich, "On the existence of analytic null asymptotically flat solutions of Einstein's vacuum field equations", Proc. R. Soc. Lond. A 381 (1982) 361.

[10] A. D. Rendall, "Reduction of the characteristic initial value problem to Cauchy problem and its applications to Einstein equations", Proc. R. Soc. Lond. A 427 (1990) 221.

[11] Jonathan Luk, "On the Local Existence for the Characteristic Initial Value Problem in General Relativity", IMRN (2011)

[12] Peng Zhao, David Hilditch, Juan A. Valiente Kroon, "The conformal Einstein field equations and the local extension of future null infinity", J.Math.Phys. 62 (2021) 10, 102501

[13] Xiaokai He, Xiaoning Wu and Naqing Xie, “Bondi mass, memory effect and balance equation of polyhomogeneous spacetime”, Class. Quant. Grav. 43 (2026) 015022

[14] Junbin Li and Xiping Zhu, "On the local extension of the future null infinity", J. Diff. Geom. 110 (2018) 73

[15] H. Friedrich, "Peeling or not peeling—is that the question?", arXiv : 1709.07709