



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Gravitoelectromagnetismo - movimiento de una partícula con espín en relatividad general.

Yesid F. Guerrero Guio, Departamento de Física

Juan Manuel Tejeiro Sarmiento, Observatorio Astronómico Nacional

Universidad Nacional de Colombia

2025

Programa

- ▶ Gravitomagnetismo basado en la linealización de las ecuaciones de Einstein.
- ▶ Gravitomagnetismo basado en las fuerzas inerciales.
- ▶ Gravitomagnetismo basado en tensores de marea.
- ▶ Ecuaciones para una partícula de prueba rotante
- ▶ Ecuaciones MPD-GEM
- ▶ Trabajo actual

Gravitomagnetismo basado en la linealización de las ecuaciones de Einstein

En la aproximación de campo débil podemos escribir $g_{\mu\nu}$ como la métrica de Minkowski más una pequeña perturbación ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$), donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ (**Bambi, 2018**). Asumiendo además que el espacio-tiempo es estacionario, es decir $g_{\mu\nu,t} = 0$ y despreciando los términos $O(h^2)$, podemos encontrar que los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\kappa} = \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}(h_{\lambda\sigma,\nu} + h_{\nu\lambda,\sigma} - h_{\nu\sigma,\lambda}) \quad (1)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\sigma\nu,\mu\lambda} - h_{\mu\nu,\sigma\lambda} - h_{\sigma\lambda,\mu\nu} + h_{\mu\lambda,\sigma\nu}), \quad R = h^{\mu\lambda},_{\mu\lambda} - h_{\mu}{}^{\mu},{}_{,\lambda}{}^{\lambda} \quad (2)$$

Reemplazando 2 en las ecuaciones de campo de Einstein, y aplicando el cambio de variable $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 1/2 \eta_{\mu\nu} h$ obtenemos :

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma\lambda},{}^{\sigma\lambda} + \bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{\lambda} + \bar{h}_{\nu\lambda,\mu}{}^{\lambda} = \frac{16\pi}{c^4}GT_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad -\bar{h}_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} = \frac{16\pi GT_{\mu\nu}}{c^4} \quad (3)$$

imponiendo el Gauge de Lorentz $\bar{h}^{\mu\alpha},{}_{,\alpha} = 0$ (La transformación infinitesimal $h_{\mu'\nu'}^{nuevo} = h_{\mu\nu}^{ant} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$ dejan invariante el tensor de Riemann) (**Misner, Thorne y Wheeler, 1973**)

Solución a las ecuaciones linealizadas

En el límite de velocidades bajas $\gamma \approx 1$, $u^\mu \approx (c, \mathbf{u})$, y definiendo $T^{\mu\nu} \equiv \rho u^\mu u^\nu$, entonces $T^{tt} \equiv \rho c^2$, $T^{ij} \equiv \rho u^i u^j$ y $T^{ti} \equiv c j^i$, donde ρ es la densidad de masa y $j^i \equiv u^i \rho$ la corriente de masa. Definimos el potencial escalar gravitacional Φ y el potencial vectorial gravitacional A^i (**S.J., 2020; Mashhoon, Gronwald y Lichtenegger, 1999**):

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad A^i(\mathbf{r}) \equiv -\frac{2G}{c^2} \int \frac{j^i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (4)$$

La métrica se puede escribir como:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j + 4\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} dt \quad (5)$$

Si se considera la métrica de Kerr para un cuerpo de rotación baja, es decir, $a \ll 1$ y el límite de campo débil, es decir, $2GM/(c^2 r) \ll 1$ ($J = Mac$ es el momento angular del cuerpo rotante):

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \boxed{-\frac{4GJ}{c^2 r} \sin^2 \theta} dt d\phi \quad (6)$$

Ecuaciones de campo linealizadas

De manera similar al electromagnetismo podemos definir los campos gravitoelectromagnéticos como:

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \right) \qquad \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \qquad (7)$$

Las ecuaciones de campo de Maxwell para el gravitomagnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi G\rho \qquad \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \right) = 0 \qquad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \right) \qquad \nabla \times \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{j} \qquad (9)$$

La fuerza de Lorentz del gravitoelectromagnetismo a partir de la componente espacial de la ecuación geodésica:

$$\mathbf{F} = m(\mathbf{E} + 2\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (10)$$

Gravitomagnetismo basado en fuerzas inerciales

Un marco de referencia propio de un observador acelerado es definido en (**Misner, Thorne y Wheeler, 1973**) de la siguiente manera: Sea τ el tiempo propio medido por un observador acelerado que se mueve en una línea de mundo $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\tau)$, donde la base tetradica ortonormal es definido como

$$\hat{e}_0(\tau) = u_N(\tau) \quad \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \hat{\eta}_{\alpha\beta} \quad (11)$$

con $u_N(\tau) = u(\tau)/c$ es la cuadrivelocidad normalizada del observador (**Hobson, Efstathiou y Lasenby, 2015**), cuya evolución a lo largo de la línea de mundo esta dado por

$$\nabla_{\hat{u}} \hat{e}_\beta = \hat{\Omega}^\alpha{}_\beta \hat{e}_\alpha; \quad \Omega^{\alpha\beta} = \frac{2}{c^2} u^{[\alpha} a^{\beta]} + \frac{1}{c} \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta}{}_{\nu\mu} \Omega^\mu u^\nu \quad (12)$$

donde $\Omega^{\mu\nu}$ es el generador de transformación infinitesimal de Lorentz (**Misner, Thorne y Wheeler, 1973**). El término $(2/c^2)u^{[\alpha} a^{\beta]}$ es el transporte Fermi-Walker, y Ω es la velocidad angular de rotación de la triada espacial \hat{e}_i relativo a la triada transportada Fermi-Walker. Las componentes espaciales del generador estan dadas por $\hat{\Omega}_{ij} = \hat{e}_{ikj} \hat{\Omega}^k$, (**Costa y Natário, 2014**). Si $\Omega^\mu = 0$ se recupera el transporte Fermi-Walker, si además $a^\mu = 0$ se recupera el transporte paralelo.

Congruencia de observadores y componentes de la conexión

El espacio-tiempo puede ser cubierto por un conjunto de curvas temporales $\mathcal{P}_x(\tau)$, donde x indica el número de la curva, y τ el tiempo propio del observador indica la posición sobre la curva. Cada curva tiene un vector tangente definido como $u^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$, y un *vector de desviación*, definido como $\mathcal{X}^\mu = \partial x^\mu / \partial x$. Permite definir la proyección espacial de la derivada covariante de u^α :

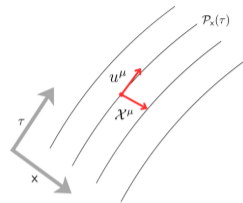


Figura: Congruencia de observadores. Imagen generada a partir de (Carroll y M., 2004).

Entonces, los componentes de $\hat{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu$ en un marco de referencia construido a partir de una congruencia de observadores acelerados son:

El cual se puede descomponer en su traza θ (expansión), su parte simétrica libre de traza $\sigma_{\alpha\beta}$ (cizalladura), y la parte antisimétrica $\omega_{\alpha\beta}$ (vorticidad):

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{00}^0 &= 0 & \hat{\Gamma}_{0j}^0 &= \hat{\Gamma}_{00}^j = \frac{1}{c^2} \hat{a}_j \\ \hat{\Gamma}_{0k}^j &= \frac{1}{c} \hat{\epsilon}^j_{\mu k} \hat{\Omega}^\mu & &= \frac{1}{c} \hat{\Omega}^j_k \\ \hat{\Gamma}_{j0}^i &= \hat{\Gamma}_{ji}^0 = \frac{1}{c} \hat{K}_{ij} & \hat{\Gamma}_{i0}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$K_{\alpha\beta} = K_{(\alpha\beta)} + K_{[\alpha\beta]} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad (14)$$

Desarrollo de la analogía

Considerando el marco de referencia de una congruencia de observadores acelerados, se calcula la componente espacial de la ecuación geodésica de una partícula de prueba que se mueve en el espacio-tiempo con cuadrivelocidad U^μ y reemplazando 15.

$$\hat{\nabla}_{\hat{U}} \hat{U}^\alpha = \frac{D\hat{U}^\alpha}{d\tau} = \frac{d\hat{U}^i}{d\tau} + \hat{\Gamma}_{00}^i (\hat{U}^0)^2 + (\hat{\Gamma}_{0j}^i + \hat{\Gamma}_{j0}^i) \hat{U}^0 \hat{U}^j + \hat{\Gamma}_{jk}^i \hat{U}^k \hat{U}^j = 0$$
$$\frac{\tilde{D}\hat{U}^i}{d\tau} = -\frac{\hat{a}^i}{c^2} (\hat{U}^0)^2 + \frac{1}{c} [\hat{U} \times (\hat{\Omega} + \hat{\omega})]^i \hat{U}^0 - \frac{1}{c} \hat{\sigma}^i_j \hat{U}^0 \hat{U}^j - \frac{1}{3c} \theta \delta^i_j \hat{U}^0 \hat{U}^j \quad (16)$$

se define el campo gravitoelectrónico y el campo gravitomagnético como (**Costa y Natário, 2014**):

$$\mathbf{G} \equiv -\mathbf{a} \quad \mathbf{H} \equiv \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \quad (17)$$

entonces en forma vectorial:

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{\hat{U}^0}{c} \left[\frac{\hat{U}^0}{c} \mathbf{G} + \mathbf{U} \times \mathbf{H} - \hat{\sigma}^i_j \hat{U}^j \hat{e}_i - \frac{1}{3} \theta \mathbf{U} \right] \quad (18)$$

se asemeja a la ecuación de movimiento para una partícula en reposo con masa m_e , carga eléctrica e y velocidad \mathbf{u}_e ubicada en un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} $d\mathbf{p}/d\tau = e(u^0 \mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B})$ (**Misner, Thorne y Wheeler, 1973; Oliva, 2002**)

Formalismo de quasi-Maxwell

Cuando el espacio-tiempo es estacionario, $h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu L_u g_{\alpha\beta} = 2\sigma_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\theta h_{\mu\nu} = 2K_{(\mu\nu)} = 0$, es decir que $\theta = 0$ y $\sigma_{\mu\nu} = 0$ (**Oliva, 2002; Natario, 2007**).

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{\hat{U}^0}{c} \left[\frac{\hat{U}^0}{c} \mathbf{G} + \mathbf{U} \times \mathbf{H} \right] \quad (19)$$

Además haciendo $\hat{\Omega}_{ij} = \hat{\omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{H}^k$ y $\hat{H}_{ij} = \epsilon_{ijk}\hat{H}^k$ entonces $\hat{K}_{[ij]} = -\epsilon_{ijk}\hat{H}^k/2$

Ecuaciones de campo en la analogía de fuerzas inerciales

Electromagnetismo

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{G} \times \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{j}_e$$

No análogo EM

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}$$

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{G} \times \mathbf{E}$$

Gravitoelectromagnetismo

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha \right)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{G} = -4\pi G_N \left(2\rho + \frac{1}{c^2} T^\alpha{}_\alpha \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{G}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{H}^2$$

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{2}{c^2} \mathbf{G} \times \mathbf{H} - \frac{16\pi G_N}{c^2} \mathbf{j}$$

$$\frac{1}{c^2} \tilde{\nabla}_i G_j - \frac{1}{c^4} G_i G_j + \frac{1}{2c^2} \mathbf{H}^2 h_{ij} + \tilde{R}_{ij} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \left(\frac{1}{2} h_{ij} T^\alpha{}_\alpha + T_{ij} \right)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$$

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{G} = 0$$

Gravitomagnetismo basado en tensores de marea

La ecuación de desvío geodésico para dos partículas que se mueven con cuadrivelocidad u^μ en un espacio-tiempo es y la ecuación de desvío de la línea de mundo para dos partículas con la misma razón q/m que se mueven a una cuadrivelocidad u^μ en un campo EM en el espacio tiempo de Minkowski son respectivamente (**Costa y Herdeiro, 2006**):

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} u^\nu u^\rho \delta x^\sigma \qquad \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{m} \nabla_\sigma F^\mu{}_\nu(\mathbf{x}) u^\nu \delta x^\sigma \qquad (20)$$

Donde las partículas tienen coordenadas $x^\mu(\tau)$ y $x_2^\mu(\tau) = x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$, y $\delta x^\mu(\tau)$ es el vector de desviación. Un observador con cuadrivelocidad u^μ mide los campos eléctrico y magnético como $E^\alpha = F^{\alpha\beta} u_\beta$ y $B^\alpha = \star F^{\alpha\beta} u_\beta$ respectivamente, donde $\star F^{\alpha\beta} = \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} / (2c)$. Los tensores de marea se pueden definir como:

$$\left. \begin{aligned} E_{\alpha\gamma} &= u^\beta \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} \\ B_{\alpha\gamma} &= u^\beta \star \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2c} u^\beta \tilde{\epsilon}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma F_{\mu\nu} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu\sigma} u^\lambda u^\sigma \\ \mathbb{H}_{\mu\nu} &= \star R_{\mu\lambda\nu\sigma} u^\lambda u^\sigma = \frac{1}{2c} \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta}{}_{\mu\lambda} R_{\alpha\beta\nu\sigma} u^\lambda u^\sigma \end{aligned}$$

Descomposición del tensor de Riemann

El tensor de Riemann se puede escribir en términos de los tensores de marea gravitoelectrónico y gravitomagnético y de un tercer tensor denotado como $\mathbb{F}_{\mu\nu}$:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{4}{c^4} \mathbb{E}^{[\alpha}{}_{[\gamma} u_{\delta]} u^{\beta]} + \frac{2}{c^3} \epsilon^{\chi\kappa}{}_{\gamma\delta} u_{\kappa} \mathbb{H}_{\chi}{}^{[\beta} u^{\alpha]} + \frac{2}{c^3} \epsilon^{\chi\alpha\beta\kappa} u_{\kappa} \mathbb{H}_{\chi}{}_{[\delta} u_{\gamma]} + \frac{1}{c^4} \epsilon^{\alpha\beta\chi\tau} \epsilon^{\nu\kappa}{}_{\gamma\delta} \mathbb{F}_{\chi\tau} u_{\nu} u_{\kappa} \quad (21)$$

donde $\mathbb{F}_{\chi\iota} = \star R \star^{\chi\lambda\iota\eta} u_{\lambda} u_{\eta} = \frac{1}{4} \epsilon_{\rho\mu\chi\lambda} \epsilon_{\nu\sigma\iota\eta} R^{\rho\mu\nu\sigma} u^{\eta} u^{\lambda}$ es conocido como el tensor de Bel (**Costa y Natário, 2014; Gómez-Lobo, 2007**) y no tiene análogo electromagnético. Se puede observar que el tensor de Bel es un tensor simétrico y además espacial, es decir $\mathbb{F}_{\mu\nu} = \mathbb{F}_{\nu\mu}$ y $\mathbb{F}_{\mu\nu} u^{\mu} = \mathbb{F}_{\mu\nu} u^{\nu} = 0$, con 6 componentes independientes, al igual que el tensor de marea gravitoelectrónico, mientras que el tensor de marea gravitomagnético tiene 8 componentes independientes. Las 20 componentes independientes del tensor de Riemann están descritos por estos tres tensores. El tensor Hodge dual en los dos primeros índices del tensor de Riemann puede ser calculado contrayendo 21 con $1/2\epsilon_{\alpha\beta\epsilon\xi}$.

$$\star R^{\epsilon\xi}{}_{\gamma\delta} = \frac{2}{c^4} \epsilon^{\epsilon\xi}{}_{\alpha\beta} \mathbb{E}^{[\alpha}{}_{[\gamma} u_{\delta]} u^{\beta]} + \frac{1}{c^3} \epsilon^{\epsilon\xi}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\chi}{}_{\gamma\delta} u_{\chi} \mathbb{H}_{\mu}{}^{\beta} u^{\alpha} + \frac{4}{c^3} u^{[\epsilon} \mathbb{H}^{\xi]}{}_{[\delta} u_{\gamma]} - \frac{1}{2c^4} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} u_{\nu} u^{[\xi} \mathbb{F}^{\epsilon]}{}_{\mu} \quad (22)$$

Ecuaciones campo tensores de marea

A partir de las ecuaciones de campo de Einstein y de las identidades de Bianchi $\star R^{\gamma\alpha}{}_{\gamma\beta} = 0$, se pueden escribir las ecuaciones de campo GEM:

Electromagnetismo

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha$$

$$E^\alpha{}_\alpha = \frac{\rho c}{\epsilon_0}$$

$$B_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \star F_{\alpha\beta;\gamma} u^\gamma - \frac{\mu_0}{c} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\gamma} j_e^\sigma u^\gamma$$

No análogo EM

$$B^\alpha{}_\alpha = 0$$

$$E_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta;\gamma} u^\gamma$$

No análogo EM

Gravitoelectromagnetismo

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha)$$

$$\mathbb{E}^\alpha{}_\alpha = 4\pi G_N (2\rho + \frac{1}{c^2} T^\alpha{}_\alpha)$$

$$\mathbb{H}_{[\alpha\beta]} = -\frac{4\pi G_N}{c^3} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\gamma} j^\sigma u^\gamma$$

$$\mathbb{F}^\alpha{}_\beta + \mathbb{E}^\alpha{}_\beta - \mathbb{F}^\sigma{}_\sigma h^\alpha{}_\beta = \frac{8\pi G_N}{c^2} [\frac{1}{2} T^\gamma{}_\gamma h^\alpha{}_\beta - T^{\langle\alpha\rangle}{}_{\langle\beta\rangle}]$$

$$\mathbb{H}^\alpha{}_\alpha = 0$$

$$\mathbb{E}_{[\alpha\beta]} = 0$$

$$\mathbb{F}_{[\alpha\beta]} = 0$$

Partícula de prueba rotante - Ecuaciones Mathisson Papapetrou Dixon

Las ecuaciones de movimiento para una partícula con espín fueron desarrolladas por Mathisson (**Mathisson, 1937**), Papapetrou (**Papapetrou, 1951**) y reformuladas por Dixon (**Ehlers y J., 1979**), mediante el desarrollo multipolar del tensor de momento-energía que describe la partícula. La aproximación polo-dipolo describe el movimiento de una partícula con masa m y espín $S^{\mu\nu}$ en un espacio-tiempo $g^{\mu\nu}$:

$$\frac{Dp^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2}R^\mu_{\nu\kappa\lambda}v^\nu S^{\kappa\lambda}, \quad \frac{DS^{\mu\nu}}{d\tau} = p^\mu v^\nu - v^\mu p^\nu \quad (23)$$

donde $D/d\tau$ es la derivada covariante sobre la curva, p^μ es el cuádrimomento, $v^\mu = dx^\mu/d\tau$ es el vector tangente a la línea de mundo, τ es el tiempo propio y $R^\mu_{\nu\kappa\lambda}$ es el tensor de curvatura de Riemann.

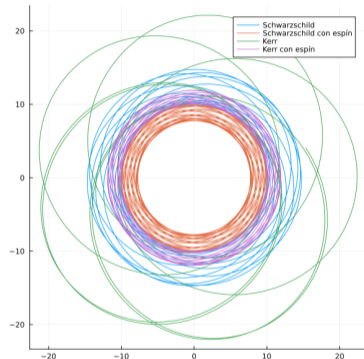


Figura: Trayectorias de partículas con y sin espín en las métricas de Schwarzschild y Kerr. Cond. in: $r_0 = 10$, $\theta_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = s = 0,9$.

Ecuaciones MPD-GEM

Wald En el límite de campo débil, para velocidades pequeñas $v \ll 1$ y espín pequeño $S \ll 1$ determinó la componente espacial de la fuerza MPD en el espacio tiempo de un objeto con masa M y momento angular \mathbf{J} .

$$f^i = m \frac{Du^i}{d\tau} = -\frac{c}{2} R^i{}_{0jk} S^{jk} \quad (24)$$

$$\mathbf{f} = -\frac{G}{c^2} \nabla \left[\frac{3(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{S})}{r^3} \right] \quad (25)$$

Comparando la ecuación 25 con el electromagnetismo, se observa que se asemeja a la fuerza entre dos dipolos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 , donde la fuerza esta dada por $\mathbf{F}_{EM} = -\nabla U$,

$U = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}$ y el campo magnético generado por el dipolo \mathbf{m}_2 es

$$\mathbf{B}_{dip} = (\mu_0/4\pi)[3(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}_2]/r^3.$$

De la ecuación se puede concluir que el momento angular de rotación (espín) \mathbf{S} ó \mathbf{J} es análogo al momento dipolar magnético \mathbf{m} . Además se puede ver que en las ecuaciones MPD existe un acomplamiento entre el espín del cuerpo masivo \mathbf{J} y el espín de la partícula \mathbf{S} . La ecuación 25 es la fuerza de gravitación espín-espín **Wald, 1972**

Efecto Lense-Thirring — Efecto de reloj gravitomagnético

Efecto Lense-Thirring:

El potencial vectorial y el campo gravitomagnético usando para un cuerpo masivo en rotación son:

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{G \mathbf{J} \times \mathbf{r}}{c^2 r^3}, \quad \mathbf{B} = -\frac{3G(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{J}}{c^2 r^3}. \quad (26)$$

El torque sobre un giroscopio está dado por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{F} es la fuerza de Lorentz gravitomagnética (GEM):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{LT} \times \mathbf{S}, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{LT} = \frac{3G(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{J}}{2c^2 r^3}.$$

Efecto de reloj gravitomagnético:

La diferencia de tiempo que tarda una partícula prógrada y retrógrada (con y sin espín) en dar una vuelta completa es:

$$T_+ - T_- = \frac{4\pi a}{c}, \quad T_+ - T_- = \frac{4\pi a}{c} - \frac{18\pi S}{mc^2}. \quad (28)$$

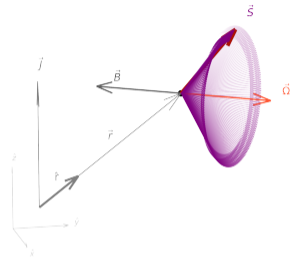


Figura: Efecto Lense-Thirring para una partícula con espín.

Mathisson propuso una interpretación física basada en el formalismo GEM. En el marco en reposo de la partícula, la fuente central gira alrededor de ella, generando un campo gravitomagnético.

Ecuaciones MPD-GEM

Fuerza de acoplamiento espín-órbita Considerando una partícula que esta en reposo con respecto a observadores estacionarios $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$, la fuerza espacial sobre un dipolo y sobre un giroscopio a partir del **formalismo quasi-maxwell (Nataro, 2007)**.

$$\mathbf{f}_{EM} = \tilde{\nabla} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \mathbf{E} (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\mu}) \quad \mathbf{f}_G = \frac{1}{2} \tilde{\nabla} \mathbf{H} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{S} - \frac{1}{c^2} \mathbf{G} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) \quad (29)$$

Esta ecuación extiende la analogía a campos estacionarios fuertes.

La analogía utilizando los **tensores de marea** entre la fuerza sobre un dipolo y sobre un giroscopio aparece si se utiliza la condición suplementaria de espín de Pirani $S^{\mu\nu} u_\nu = 0$ (**Costa y Herdeiro, 2006**).

$$F_{EM}^\beta = B_\alpha^\beta \mu^\alpha \quad F_G^\beta = -\mathbb{H}_\alpha^\beta S^\alpha \quad (30)$$

trabajando...

- ▶ Como se comportan los efectos de Lense-Thirring y el efecto de reloj gravitomagnético en las analogías de campos fuertes.
- ▶ Determinación de los componentes del tensor de marea gravitomagnético y gravitoeléctrico para la métrica de Kerr y Schwarzschild

Métrica de Schwarzschild

$$\mathbb{H}_{t\theta} = -\frac{3GM \sin \theta}{c^3 r} u^r u^\phi = \mathbb{H}_{\theta t},$$

$$\mathbb{H}_{t\phi} = \frac{3GM \sin \theta}{c^3 r} u^r u^\theta = \mathbb{H}_{\phi t},$$

$$\mathbb{H}_{r\theta} = \frac{3GM \sin \theta}{c^3 r} u^t u^\phi = \mathbb{H}_{\theta r},$$

$$\mathbb{H}_{r\phi} = -\frac{3GM \sin \theta}{c^3 r} u^t u^\theta = \mathbb{H}_{\phi r}.$$

$\mathbb{H}_{\mu\nu} = 0$ para un observador radial
 $u^\mu = (u^t, u^r, 0, 0)$

Ecuaciones de Kerr:

$$\mathbb{H}_{tt} = -2\alpha a u^r u^\theta$$

$$\mathbb{H}_{tr} = a\alpha [a u^\phi - u^t] u^\theta$$

$$\mathbb{H}_{t\theta} = -\alpha [(a^2 + r^2) u^\phi - a u^t] u^r$$

$$\mathbb{H}_{r\theta} = \alpha [a u^\phi - u^t] [(a^2 + r^2) u^\phi - a u^t]$$

$$\mathbb{H}_{r\phi} = -\alpha (a^2 + r^2) (u^t - a u^\phi) u^\theta$$

$$\mathbb{H}_{\phi\theta} = \alpha a [(a^2 + r^2) u^\phi - a u^t] u^r$$

$$\mathbb{H}_{rr} = \mathbb{H}_{\theta\theta} = 0$$

$\mathbb{H}_{\mu\nu} = 0$ para un observador en el plano ecuatorial $u^\theta = 0$ y con velocidad angular $d\phi/dt = ac^2/(a^2 + r^2)$

Spin-Gravity Coupling in a Rotating Universe

Bahram Mashhoon^{1,2,*}, Masoud Molaei^{3,†} and Yuri N. Obukhov^{4‡}

Effective dark energy through spin-gravity coupling

Giovanni Otalora^{a,1}, Emmanuel N. Saridakis^{b,c,d,2}

^a*Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Tarapacá, Casilla 7-D, Arica, Chile*

^b*National Observatory of Athens, Lofos Nymfon, 11852 Athens, Greece*

^c*CAS Key Laboratory for Research in Galaxies and Cosmology, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*

^d*Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Avda. Angamos 0610, Casilla 1280 Antofagasta, Chile*

Gravitomagnetism and gravitational waves

L. Iorio^{*}, C. Corda[§]

Referencias I

- Bambi, Cosimo (2018). "Introduction to General Relativity". En: DOI: 10.1007/978-981-13-1090-4. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-981-13-1090-4>.
- Carroll y Sean M. (2004). "Spacetime and geometry. An introduction to general relativity". En: *sgig* 58 (1), págs. 52-52. ISSN: 0031-9228. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2004sgig.book.....C/abstract>.
- Costa, L. Filipe O. y Carlos A.R. Herdeiro (dic. de 2006). "A gravito-electromagnetic analogy based on tidal tensors". En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 78 (2). ISSN: 15507998. DOI: 10.1103/physrevd.78.024021. URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0612140v2>.
- Costa, L. Filipe O. y José Natário (oct. de 2014). "Gravito-electromagnetic analogies". En: *General Relativity and Gravitation* 46 (10), págs. 1-57. DOI: 10.1007/s10714-014-1792-1. URL: <http://arxiv.org/abs/1207.0465><http://dx.doi.org/10.1007/s10714-014-1792-1>.
- Ehlers y J. (1979). "Isolating gravitating systems in general relativity. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course 67. Conference held at Varenna on Lake Como, Italy, 28 June - 10 July 1976.". En: *igsg*. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1979igsg.conf.....E/abstract>.
- Gómez-Lobo, Alfonso García-Parrado (nov. de 2007). "Dynamical laws of superenergy in General Relativity". En: *Classical and Quantum Gravity* 25 (1). DOI: 10.1088/0264-9381/25/1/015006. URL: <http://arxiv.org/abs/0707.1475><http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/25/1/015006>.
- Hobson, M P., G P. Efstathiou y A N. Lasenby (2015). "General Relativity : An Introduction for Physicists". En: URL: https://books.google.com/books/about/General_Relativity.html?hl=es&id=5dryXCWR7EIC.
- Mashhoon, B., F. Gronwald y H. I. M. Lichtenegger (dic. de 1999). "Gravitomagnetism and the Clock Effect". En: *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*, págs. 83-108. DOI: 10.1007/3-540-40988-2_5. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9912027>http://dx.doi.org/10.1007/3-540-40988-2_5.

Referencias II

- Mathisson, Myron (1937). "Neue mechanik materieller systemes". En: *Acta Phys.Polon.* 6, págs. 163-200.
- Misner, Charles W., Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler (ene. de 1973). "GRAVITATION". En: *Gravitation*, págs. 1-1280. ISSN: 0282-7913. DOI: 10.54797/tf1.v5i1i1-2.1729.
- Nataro, Jose (ene. de 2007). "Quasi-Maxwell interpretation of the spin-curvature coupling". En: *General Relativity and Gravitation* 39 (9), págs. 1477-1487. DOI: 10.1007/s10714-007-0474-7. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0701067>; <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-007-0474-7>.
- Oliva, Waldyr Muniz (2002). "Geometric Mechanics". En: 1798. DOI: 10.1007/B84214. URL: <http://link.springer.com/10.1007/b84214>.
- Papapetrou, A (oct. de 1951). "Spinning test-particles in general relativity. I". En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 209 (1097), págs. 248-258. ISSN: 0080-4630. DOI: 10.1098/RSPA.1951.0200. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1951.0200>.
- S.J., Nelson Alonso Velandia Heredia (mar. de 2020). "Solution of Mathisson-Papapetrou-Dixon Equations for Spinning Test Particles in a Kerr Metric". En: *olution of Mathisson-Papapetrou-Dixon Equations for Spinning Test Particles in a Kerr Metric*. DOI: 10.11144/JAVERIANA.9789587814897. URL: <https://perfilesycapacidades.javeriana.edu.co/es/publications/solution-of-mathisson-papapetrou-dixon-equations-for-spinning-tes>.
- Wald, Robert (jul. de 1972). "Gravitational Spin Interaction". En: *Physical Review D* 6 (2), pág. 406. ISSN: 05562821. DOI: 10.1103/PhysRevD.6.406. URL: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.6.406>.