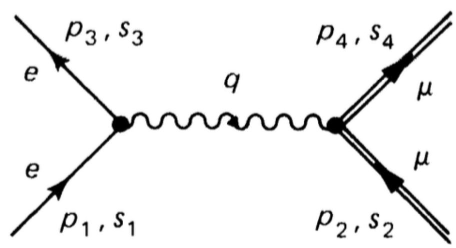
Elektron-müon saçılma genliğini kütle merkezi çerçevesinde hesaplayın. Elektron ve müonun başlangıçta z-ekseni boyunca birbirine doğru hareket ettiğini, birbirlerini iterek saçıldıklarını ve tekrar z-ekseni boyunca geri döndüklerini varsayın. (Başlangıç ve son durumdaki tüm parçacıkların helicity'sinin +1 olduğunu kabul edin.)

İpucu:



Bu Feynman diyagramının temsil ettiği genlik şu şekilde hesaplanır:

$$\mathcal{M} = 2\pi)^4 \int \left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3)(ig_e\gamma^{\mu})u^{(s_1)}(p_1)\right]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \quad \left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4)(ig_e\gamma^{\nu})u^{(s_2)}(p_2)\right]$$
$$\times\, \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4)d^4q$$

$$= -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}\left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3)\gamma^{\mu}u^{(s_1)}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4)\gamma_{\mu}u^{(s_2)}(p_2)\right]$$

Çözüm:

Dirac denkleminin çözümleri yukarıdaki özel saçılma durumu için aşağıdaki gibi yazılabilir (+z yönünü sağa doğru kabul ederek).

$$u(1) = \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix}, \; u(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_+ \\ 0 \\ b_- \end{pmatrix}, \;\; u(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_+ \\ 0 \\ a_- \end{pmatrix}, \; u(4) = \begin{pmatrix} b_+ \\ 0 \\ b_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_\pm \equiv \sqrt{(E_e \pm mc^2)/c}; \; b_\pm \equiv \sqrt{\left(E_\mu \pm Mc^2\right)/c}.$$

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}\left\{[\bar{u}(3)\gamma^0 u(1)][\bar{u}(4)\gamma^0 u(2)] - [\bar{u}(3)\gamma^i u(1)][\bar{u}(4)\gamma^i u(2)]\right\}$$

(i 1’den 3’e toplam. 0’ıncı bileşeni ayrı yazdık.)

$$\bar{u}(3)\gamma^0 u(1) = (0 \quad a_+ \quad 0 \quad a_-)\gamma^0\gamma^0 \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \quad a_+ \quad 0 \quad a_-) \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\bar{u}(3)\gamma^i u(1) = (0 \quad a_+ \quad 0 a_-)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad a_+ \quad 0 - a_-)\begin{pmatrix} \sigma^i \binom{a_-}{0} \\ -\sigma^i \binom{a_+}{0} \end{pmatrix} = (0 \quad a_+)\sigma^i \binom{a_-}{0} + (0 \quad a_-)\sigma^i \binom{a_+}{0}.$$

$$= 2a_+a_-\left[\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}^i & \sigma_{12}^i \\ \sigma_{21}^i & \sigma_{22}^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\right] = 2a_+a_-\left[\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}^i \\ \sigma_{21}^i\end{pmatrix}\right] =$$

$$2a_+a_-\sigma_{21}^i.$$

$$\bar{u}(4)\gamma^i u(2) = \begin{pmatrix}b_+ & 0 & b_- & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ b_+ \\ 0 \\ b_-\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b_+ & 0 & -b_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^i\begin{pmatrix}0 \\ b_-\end{pmatrix} \\ -\sigma^i\begin{pmatrix}0 \\ b_+\end{pmatrix}\end{pmatrix} = (b_+0)\sigma^i\begin{pmatrix}0 \\ b_-\end{pmatrix} + (b_-0)\sigma^i\begin{pmatrix}0 \\ b_+\end{pmatrix}$$

$$= 2b_+b_-\left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}^i \\ \sigma_{21}^i \\ \sigma_{12}^i \\ \sigma_{22}^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}\right] = 2b_+b_-\left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{12}^i \\ \sigma_{22}^i\end{pmatrix}\right] = 2b_+b_-\sigma_{12}^i$$

$\sigma_{21} \cdot \sigma_{12} = (1)(1) + (i)(-i) + (0)(0) = 2$ eşitliğini kullanarak:

$$\mathcal{M} = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}(2a_+a_-2b_+b_-)\sigma_{21} \cdot \sigma_{12} = \frac{8g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}(a_+a_-)(b_+b_-)$$

$(a_+a_-) = \sqrt{\dfrac{E_e^2 - m^2c^4}{c^2}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{p}_e^2c^2}{c^2}} = |\mathbf{p}_e|,\ (b_+b_-) = |\mathbf{p}_\mu|$, ve $|\mathbf{p}_e| = |\mathbf{p}_\mu|$.

Dolayısıyla,

$$\mathcal{M} = \frac{8g_e^2\mathbf{p}_e^2}{(p_1 - p_3)^2}$$

$$(p_1 - p_3) = (0, 2\mathbf{p}_e)$$

$$(p_1 - p_3)^2 = 0 - 4\mathbf{p}_e^2.$$

$$\mathcal{M} = \frac{8g_e^2\mathbf{p}_e^2}{-4\mathbf{p}_e^2} = -2g_e^2.$$