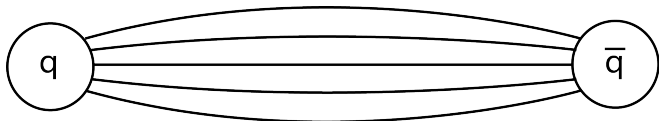


Glúons, grande N e cordas

Pedro F. H. Bairrão

6 de novembro de 2024

Tanto a teoria de cordas quanto a QCD foram propostas originalmente como modelos para a força nuclear forte.



A QCD se consolidou como a teoria fundamental, enquanto a teoria de cordas foi deixada de lado (e posteriormente reaproveitada).

Porém, ainda existem conexões entre os dois assuntos. Uma maneira de ver uma conexão é com a expansão de grande N .

Tópicos

- 1 Espalhamento de glúons
- 2 A dependência dos diagramas com N
- 3 Acoplamento de 't Hooft $\lambda = g^2 N$
- 4 A conexão com cordas

Se uma teoria quântica é descrita pela quantização de um sistema clássico com ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (1)$$

a amplitude de probabilidade $\mathcal{A}(i \rightarrow f)$ é

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \sum_{\substack{\text{todas as histórias} \\ \text{clássicas}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(i \rightarrow f)\right). \quad (2)$$

Se uma teoria quântica é descrita pela quantização de um sistema clássico com ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (1)$$

a amplitude de probabilidade $\mathcal{A}(i \rightarrow f)$ é

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \sum_{\substack{\text{todas as histórias} \\ \text{clássicas}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(i \rightarrow f)\right). \quad (2)$$

Amplitudes de probabilidade satisfazem propriedades similares a probabilidades: para dois eventos independentes A e B ,

$$\mathcal{A}(A \text{ e } B) = \mathcal{A}(A)\mathcal{A}(B). \quad (3)$$

Na QCD temos o grau de liberdade “cor”, que pode tomar 3 valores (vermelho, azul, verde) e um grupo de simetria $SU(3)_{\text{cor}}$ de matrizes que agem sobre os “vetores” no espaço de cor:

$$V^i \rightarrow U^i_j V^j, \quad (4)$$

Na QCD temos o grau de liberdade “cor”, que pode tomar 3 valores (**vermelho**, **azul**, **verde**) e um grupo de simetria $SU(3)_{\text{cor}}$ de matrizes que agem sobre os “vetores” no espaço de cor:

$$V^i \rightarrow U^i_j V^j, \quad (4)$$

em que

$$i, j = (\text{vermelho}, \text{azul}, \text{verde}), \quad U^i_j \in SU(3)_{\text{cor}}. \quad (5)$$

Na QCD temos o grau de liberdade “cor”, que pode tomar 3 valores (**vermelho**, **azul**, **verde**) e um grupo de simetria $SU(3)_{\text{cor}}$ de matrizes que agem sobre os “vetores” no espaço de cor:

$$V^i \rightarrow U^i_j V^j, \quad (4)$$

em que

$$i, j = (\text{vermelho}, \text{azul}, \text{verde}), \quad U^i_j \in SU(3)_{\text{cor}}. \quad (5)$$

Glúons são partículas vetoriais com os seguintes índices de $SU(3)_{\text{cor}}$:

$$(A_\mu)^i_j \quad (6)$$

Sob uma rotação das cores, o índice de cima se transforma com U^i_j e o de baixo com $U^\dagger_j{}^k$.

A amplitude de um glúon inicialmente no ponto do espaçotempo x se encontrado no ponto y é

$$x \text{ --- } y + x \text{ --- } \begin{array}{c} \text{---} z \\ \text{---} w \\ \text{---} \end{array} \text{ --- } y + \dots \quad (7)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{glúon em } x \rightarrow \text{glúon em } y) &= \mathcal{A}(\text{ir diretamente}) \\ &+ \mathcal{A}(\text{decair em dois que depois se juntam}) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Pela propriedade multiplicativa

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\text{decair em dois que depois se juntam}) \\ &= \mathcal{A}(\text{propagar de } x \text{ a } z) \mathcal{A}(\text{decair})^2 \mathcal{A}(\text{propagar de } z \text{ a } w)^2 \\ &\quad \times \mathcal{A}(\text{propagar de } w \text{ a } y). \end{aligned} \quad (9)$$

Os ingredientes básicos são o propagador e a amplitude das interações (vértices).

$$\mu, i, j \text{ (diagrama de propagador)} \nu, k, l \equiv \langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle \quad (10)$$

$$\text{(diagrama de vértice 3)} \equiv \Gamma_{\mu\nu\rho}^{i j k l m n} \quad \text{(diagrama de vértice 4)} \equiv \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{i j k l m n r s} \quad (11)$$

Os ingredientes básicos são o propagador e a amplitude das interações (vértices).

$$\mu, i, j \text{ (diagrama de linha de onda)} \nu, k, l \equiv \langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{diagrama de vértice Y} &\equiv \Gamma_{\mu\nu\rho}^i j^k l^m n \\ \text{diagrama de vértice X} &\equiv \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^i j^k l^m n^r s \end{aligned} \quad (11)$$

A forma do propagador e das interações pode ser extraída da ação, que para a dinâmica de glúons é

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x (F_{\mu\nu})^i_j (F^{\mu\nu})^j_i, \quad (12)$$

com

$$(F_{\mu\nu})^i_j = \partial_\mu (A_\nu)^i_j - \partial_\nu (A_\mu)^i_j - i[A_\mu, A_\nu]^i_j. \quad (13)$$

O resultado é

$$\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle = g^2 \Delta_{\mu\nu}(x-y) \left(\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta_l^k \right)$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}{}^i{}_j{}^k{}_l{}^m{}_n \sim \frac{1}{g^2}$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}{}^i{}_j{}^k{}_l{}^m{}_n{}^r{}_s \sim \frac{1}{g^2}. \quad (14)$$

Cada propagador adiciona g^2 ao diagrama, enquanto cada interação adiciona $1/g^2$. Como cada vértice vem acompanhado de alguns propagadores:

$$\text{Mais interações} \longrightarrow \text{maior potência de } g \quad (15)$$

Se g é pequeno, os diagramas mais relevantes são aqueles com menos vértices (teoria de perturbação).

Na QCD, a amplitude das interações cresce conforme a escala de energia diminui



A teoria de perturbação não funciona em baixas energias.

Na QCD, a amplitude das interações cresce conforme a escala de energia diminui



A teoria de perturbação não funciona em baixas energias.

A ideia da expansão de grande N é usar o número de cores $N = 3$ da QCD como parâmetro de expansão (expandir em $1/N = 1/3 \sim 0.3$).

Do que vimos antes, a única diferença para N cores é que o propagador se torna

$$\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle = g^2 \Delta_{\mu\nu}(x-y) \left(\delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{N} \delta_j^i \delta_l^k \right) \quad (16)$$

Na ausência de quarks podemos ignorar o segundo termo:

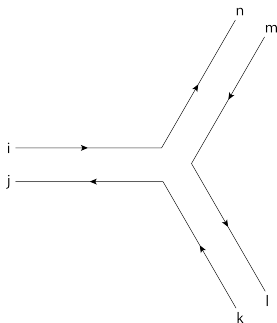
$$\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle \rightarrow g^2 \Delta_{\mu\nu}(x-y) \delta_l^i \delta_j^k \quad (17)$$

Para escrever os diagramas de Feynman, vamos usar a notação

$$\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu l}^k(y) \rangle \sim \begin{array}{c} i \longrightarrow \longrightarrow l \\ j \longleftarrow \longleftarrow k \end{array} \quad (18)$$

para o propagador. As linhas indicam contrações de índices de acordo com $\delta_l^i \delta_j^k$.

O vértice de três glúons se torna



Vamos examinar a dependência com N do seguinte diagrama

$$\left\langle \begin{array}{c} \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ \begin{array}{c} \leftarrow j \rightarrow \\ \leftarrow i \rightarrow \end{array} \\ \downarrow \\ i \end{array} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu k}^j(x) A_{\rho l}^k(x) A_{\sigma i}^l(x) \right\rangle \quad (19)$$

em primeira ordem em g .

Vamos examinar a dependência com N do seguinte diagrama

$$\left\langle \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & k \\ & \uparrow & \downarrow \\ j & \rightarrow & k \\ i & \leftarrow & i \\ & \downarrow & \uparrow \\ & i & i \end{array} \end{array} \right\rangle \equiv \left\langle A_{\mu j}^i(x) A_{\nu k}^j(x) A_{\rho l}^k(x) A_{\sigma i}^l(x) \right\rangle \quad (19)$$

em primeira ordem em g .

Somando sobre todas as maneiras de juntar os pontos, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr } A^4 \rangle &= \left\langle A_j^i A_k^j A_l^k A_i^l \right\rangle \\ &= \overbrace{A_j^i A_k^j A_l^k A_i^l} + \overbrace{A_j^i A_k^j A_l^k A_i^l} + \overbrace{A_j^i A_k^j A_l^k A_i^l} \\ &= 2 \left\langle A_j^i A_k^j \right\rangle \left\langle A_l^k A_i^l \right\rangle + \left\langle A_j^i A_l^k \right\rangle \left\langle A_k^j A_i^l \right\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Para ver como os índices de cor estamos contraídos, usamos

$$\langle A^i_j A^k_l \rangle \sim g^2 \delta_l^j \delta_j^k. \quad (21)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr} A^4 \rangle &= 2 \langle A^i_j A^j_k \rangle \langle A^k_l A^l_i \rangle + \langle A^i_j A^k_l \rangle \langle A^j_k A^l_i \rangle \\ &\sim 2g^4 \delta_k^i \delta_j^j \delta_i^k \delta_l^l + g^4 \delta_l^i \delta_j^k \delta_i^j \delta_k^l \\ &= 2g^4 N^3 + g^4 N. \end{aligned} \quad (22)$$

O primeiro termo é o que domina para N grande.

Diagramaticamente:

The equation (23) shows a planar diagram on the left, which is a cross with four arms. The top arm has an upward arrow labeled 'j', the bottom arm has a downward arrow labeled 'i', the left arm has a rightward arrow labeled 'j', and the right arm has a leftward arrow labeled 'k'. This diagram is enclosed in large angle brackets. To its right is an equals sign followed by the number '2'. This is followed by two diagrams separated by a plus sign. The first diagram is a non-planar loop with three internal vertices and four external legs, each with an arrow pointing towards the center. The second diagram is another non-planar loop with three internal vertices and four external legs, each with an arrow pointing towards the center. The entire equation is labeled (23) on the far right.

O primeiro diagrama é planar (pode ser desenhado em um plano) e tem três loops fechados de índices, levando ao fator N^3 . O segundo não é planar e tem apenas um, portanto N^1 .

Diagramaticamente:

The diagrammatic equation (23) shows a planar diagram on the left, which is a cross with four arms. The top arm has an upward arrow labeled 'j', the bottom arm has a downward arrow labeled 'i', the left arm has a rightward arrow labeled 'j', and the right arm has a leftward arrow labeled 'k'. This diagram is enclosed in large angle brackets and is equated to the sum of two non-planar diagrams. The first non-planar diagram is a figure-eight shape with arrows indicating a clockwise flow. The second non-planar diagram is a more complex shape with multiple loops and arrows. The equation is labeled (23) on the right.

O primeiro diagrama é planar (pode ser desenhado em um plano) e tem três loops fechados de índices, levando ao fator N^3 . O segundo não é planar e tem apenas um, portanto N^1 .

Isso mostra que diagramas diferentes dependem de N de formas diferentes.



A expansão de grande N faz sentido!

Simplesmente tomar $N \rightarrow \infty$ não é suficiente. Um dos parâmetros da QCD é a escala de energia

$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu \exp\left(-\frac{3}{22} \frac{(4\pi)^2}{g(\mu)^2 N}\right). \quad (24)$$

$$\frac{d\Lambda_{\text{QCD}}}{d\mu} = 0. \quad (25)$$

Se tomarmos $N \rightarrow \infty$ diretamente, obtemos $\Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow \mu$, o que não faz sentido.

Para evitar esse problema, definimos o acoplamento de 't Hooft

$$\lambda = g^2 N. \quad (26)$$

A ideia é tomar o limite $N \rightarrow \infty$ com λ mantido constante.

Para evitar esse problema, definimos o acoplamento de 't Hooft

$$\lambda = g^2 N. \quad (26)$$

A ideia é tomar o limite $N \rightarrow \infty$ com λ mantido constante.

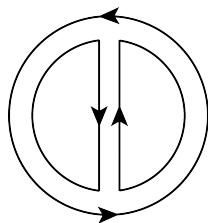
Em termos de λ , a ação se torna

$$S = -\frac{N}{4\lambda} \int d^d x (F_{\mu\nu})^i_j (F^{\mu\nu})^j_i. \quad (27)$$

Cada propagador vem com um fator de λ/N e cada vértice vem com um de N/λ . Cada loop de índices vem com um fator N :

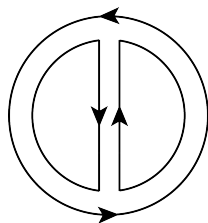
$$\text{diagrama} \sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{\text{número de propagadores}} \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{\text{número de vértices}} N^{\text{número de loops}}. \quad (28)$$

Por exemplo, tomemos o diagrama de vácuo planar:



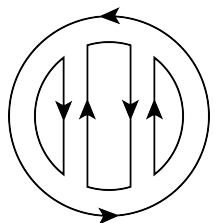
$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^3 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 N^3 = \lambda N^2 \quad (29)$$

Por exemplo, tomemos o diagrama de vácuo planar:



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^3 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 N^3 = \lambda N^2 \quad (29)$$

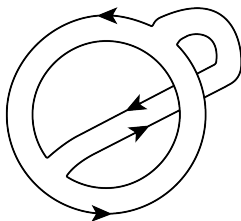
Na próxima ordem em λ , temos o diagrama planar



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^6 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^4 N^4 = \lambda^2 N^2 \quad (30)$$

Este diagrama possui a mesma dependência em N que o primeiro.

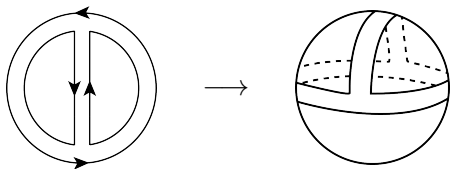
Considere agora o diagrama



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^3 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 N = \lambda \quad (31)$$

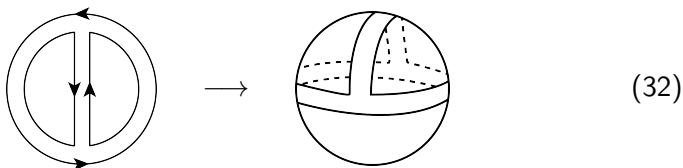
Apesar da mesma dependência em λ do (30), este é suprimido por um fator $1/N^2$ em relação a ele. Note que este não é planar.

A expansão de grande N possui um caráter topológico.
 Para ver isso, tratamos todas as linhas duplas como contornos de polígonos, incluindo a externa:



(32)

A expansão de grande N possui um caráter topológico.
Para ver isso, tratamos todas as linhas duplas como contornos de polígonos, incluindo a externa:



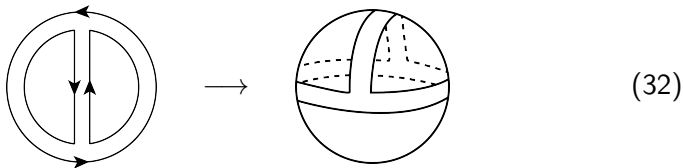
(32)

O resultado é um poliedro (que pode ter buracos). Esse poliedro possui

- número de arestas (edges) = número de propagadores $\equiv E$
- número de faces (faces) = número de loops de índice $\equiv F$
- número de vértices $\equiv V$

(33)

A expansão de grande N possui um caráter topológico. Para ver isso, tratamos todas as linhas duplas como contornos de polígonos, incluindo a externa:



O resultado é um poliedro (que pode ter buracos). Esse poliedro possui

número de arestas (edges) = número de propagadores $\equiv E$

número de faces (faces) = número de loops de índice $\equiv F$

número de vértices $\equiv V$ (33)

A fórmula de antes se torna

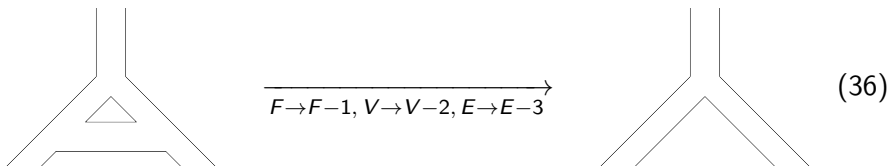
$$\text{diagrama} \sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^E \left(\frac{N}{\lambda}\right)^V N^F = N^{F+V-E} \lambda^{E-V}. \quad (34)$$

A combinação

$$\chi = F + V - E \quad (35)$$

é chamada de número de Euler do poliedro.

χ é um número topológico: seu valor não muda se for realizada qualquer transformação contínua no poliedro, desde que não se altere o número de buracos. Isso inclui por exemplo remover faces:



$$\chi = F + V - E \rightarrow F - 1 + V - 2 - E + 3 = \chi \quad (37)$$

O número de Euler também pode ser escrito como

$$\chi = 2 - 2h, \tag{38}$$

em que h é o número de buracos.

O número de Euler também pode ser escrito como

$$\chi = 2 - 2h, \tag{38}$$

em que h é o número de buracos.

A expansão de grande N é uma expansão no número de Euler de superfícies fechadas.

O número de Euler também pode ser escrito como

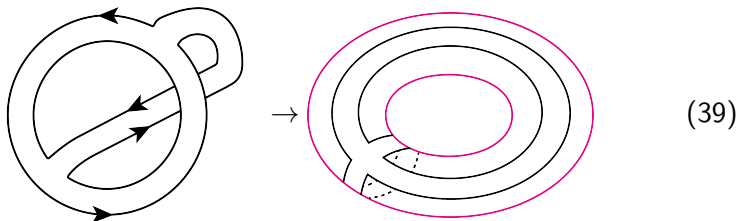
$$\chi = 2 - 2h, \quad (38)$$

em que h é o número de buracos.

A expansão de grande N é uma expansão no número de Euler de superfícies fechadas.

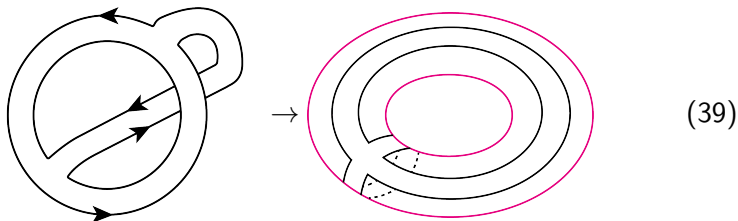
Para a esfera $\chi = 2$, todos os diagramas de vácuo planares são proporcionais a N^2 .

Com um buraco, $h = 1$ e $\chi = 0$: obtemos um toro



os diagramas de vácuo que podem ser desenhados sobre um toro são proporcionais a N^0 .

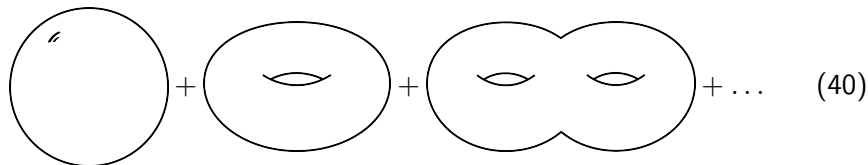
Com um buraco, $h = 1$ e $\chi = 0$: obtemos um toro



os diagramas de vácuo que podem ser desenhados sobre um toro são proporcionais a N^0 .

Os demais termos possuem cada vez mais buracos e a potência de N fica cada vez mais negativa.

A expansão de N grande a organiza como uma soma sobre topologias:



$$\text{Sphere} + \text{Torus} + \text{Genus-2 Surface} + \dots \quad (40)$$

É assim que se organiza a expansão perturbativa de uma teoria de cordas fechadas!

Até agora nada depende do valor de $\lambda = g^2 N$.

Porém, os graus de liberdade de uma teoria de glúons fracamente interagentes, enquanto os de uma teoria de cordas são grávitons e outros.

Se as duas teorias forem fracamente acopladas, a correspondência não faz sentido. Portanto, a suspeita é de que

Expansão de grande N de uma teoria de glúons **fortemente** acoplada



Teoria de cordas fracamente acopladas se propagando em algum fundo

(41)

Simplesmente tomar $N \rightarrow \infty$ não é suficiente. A dependência do acoplamento g na escala de renormalização μ em ordem de um loop é dado por

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2} - \frac{11}{3} \frac{N}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} \right), \quad g \equiv g(\Lambda_{UV}). \quad (42)$$

A escala de energia em que efeitos não perturbativos dominam pode ser aproximada pelo valor de μ para o qual $g(\mu)$ diverge, que é

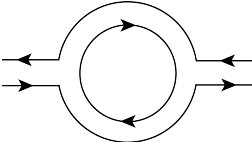
$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu \exp \left(-\frac{3}{22} \frac{(4\pi)^2}{g(\mu)^2 N} \right). \quad (43)$$

Λ_{QCD} não depende da escala arbitrária μ :

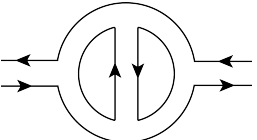
$$\frac{d\Lambda_{\text{QCD}}}{d\mu} = 0. \quad (44)$$

Se tomarmos $N \rightarrow \infty$ diretamente, obtemos $\Lambda_{\text{QCD}} \rightarrow \mu$, o que não faz sentido.

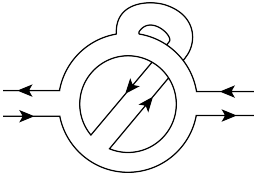
Podemos considerar diagramas que não são bolhas de vácuo. Considere as contribuições para a autoenergia dos glúons:



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^4 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 N = \frac{\lambda^2}{N} \quad (45)$$



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^7 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^4 N^2 = \frac{\lambda^3}{N} \quad (46)$$



$$\sim \left(\frac{\lambda}{N}\right)^7 \left(\frac{N}{\lambda}\right)^4 N^0 = \frac{\lambda^3}{N^3} \quad (47)$$

que não é planar é suprimido por um fator $1/N^2$ em relação aos planares.