



A quantum field theory approach to critical dynamics: the role of multiplicative noise

Prof. Daniel G. Barci

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

VII Oficina Nacional de Teoria Quântica de Campos
ONTQC, Universidade Federal da Bahia, Brazil

8 de dezembro 2021.



Grupo de Teoria de Campos em Matéria Condensada e Mecânica Estatística-UERJ



Nathan O. Silvano
Aluno Doutorado



Rui Aquino
Aluno Doutorado



João Marco Piccoli
Aluno de Mestrado

Critical Dynamics of Multiplicative Systems
Seção de Pôster- Hoje 15:15h.



Prof. Zochil González Arenas
Departamento de Matemática Aplicada,
IME-UERJ



Dr. Nei Lopes
Pós-Doutor (FAPERJ)

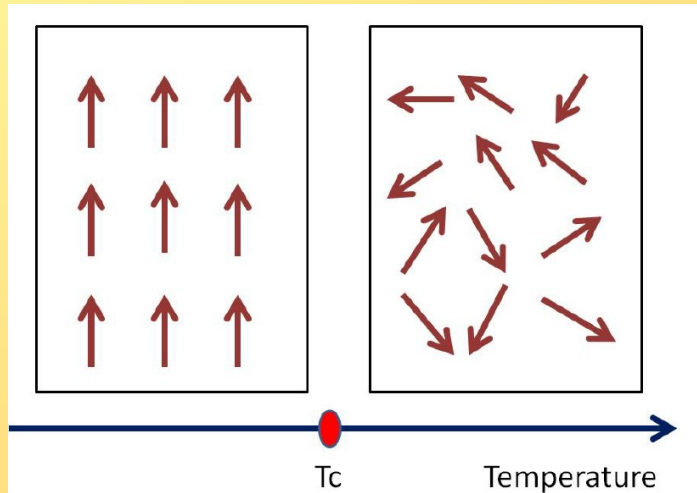
Conteúdo

“Critical Dynamics: multiplicative noise fixed point in two dimensional systems”,
Nathan O. Silvano and Daniel G. Barci, arXiv:2112.01547 (2021).

- Transições de fase contínuas
- O Grupo de Renormalização (à la Wilson)
- Dinâmica de Transições de Fase
- Processos Estocásticos-Equação de Langevin
- Integral Funcional- Supersimetria
- O Grupo de Renormalização Dinâmico
- Campo escalar real, o papel do ruído multiplicativo.
- Perspectivas

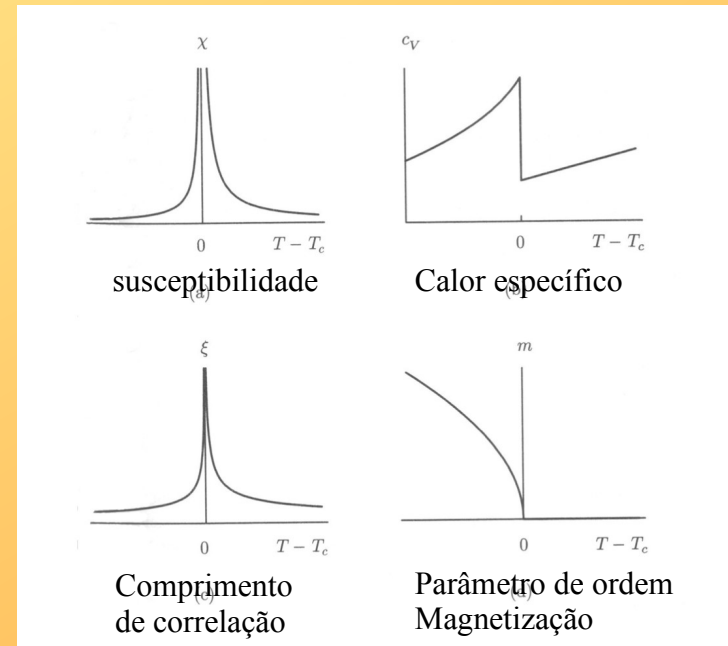
Transição de fase contínua

Transição Ferromagnética

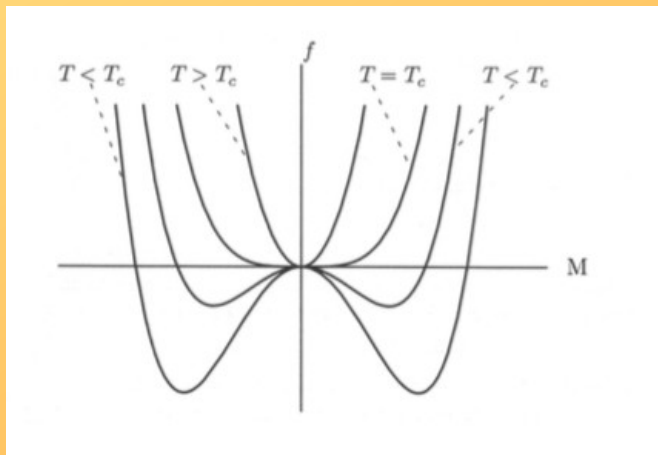


Fase ordenada

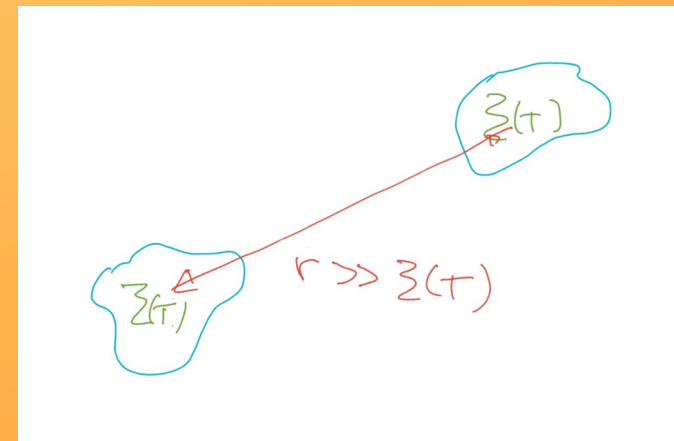
Fase desordenada



Quebra espontânea de simetria



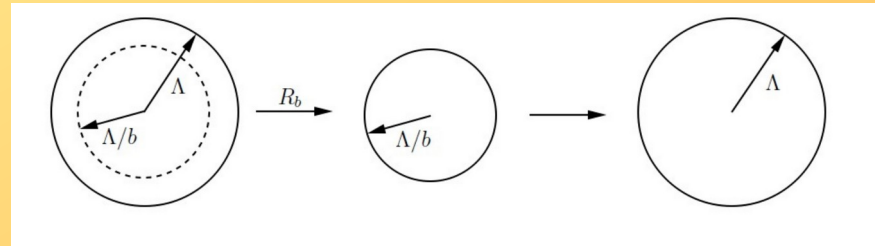
Domínios ordenados dentro do comprimento de correlação



O Grupo de Renormalização de Wilson

K.G Wilson, Physical Review **B4**, 3174(1971).

Espaço de momentos
Redução do cut-off e escalamento



Separação do campo em modos
de curta e longa distância

$$\tilde{\phi}(\mathbf{q}) = \tilde{\phi}^>(\mathbf{q}) + \tilde{\phi}^<(\mathbf{q})$$

Transformação do GR
Integração dos modos de curta distância

$$e^{-\mathcal{H}'_{\Lambda/b}[\phi^<]} = \int \mathcal{D}\phi^> e^{-\mathcal{H}_{\Lambda}[\phi^> + \phi^<]}$$

Re-escalamento dos
Momentos e campos

$$\begin{aligned} q'_i &= b q_i \\ \phi_{<} \left(\frac{q'}{b} \right) &= \xi(b) \phi'(q') \end{aligned}$$

Sistemas equivalentes

$$\mathcal{H}_{\Lambda}(\phi) \rightarrow \mathcal{H}'_{\Lambda}(\phi')$$

Processo Iterativo: mantém a função de partição invariante

$$\mathcal{H}[\phi] \rightarrow \mathcal{H}'[\phi'] \rightarrow \mathcal{H}''[\phi''] \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}[\phi^{(n)}]$$

$$Z = Z' = Z'' = \dots = Z^{(n)}$$

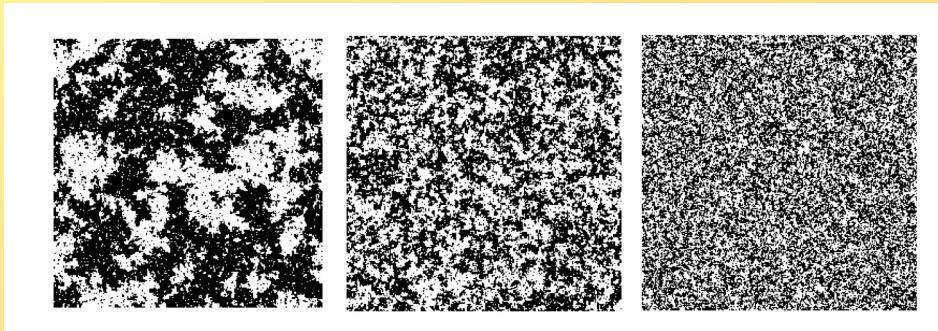
Transformação infinitesimal $b = 1 + \delta\ell$



Equações diferenciais para o fluxo do GR

Diagrama de fluxos, pontos fixos, universalidade

Configuração depois de n passos do GR, $T > T_c$



Configuração depois de n passos do GR, $T = T_c$

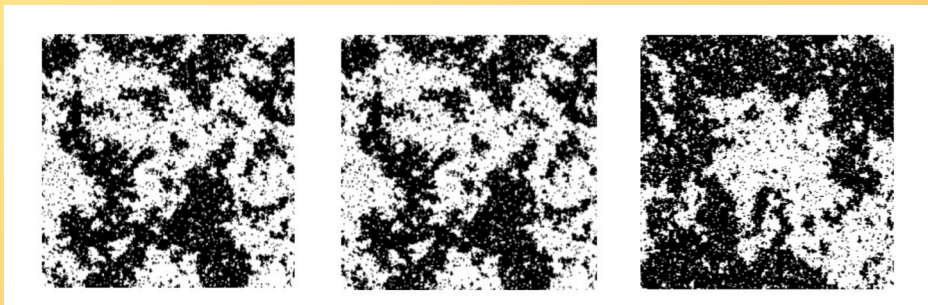
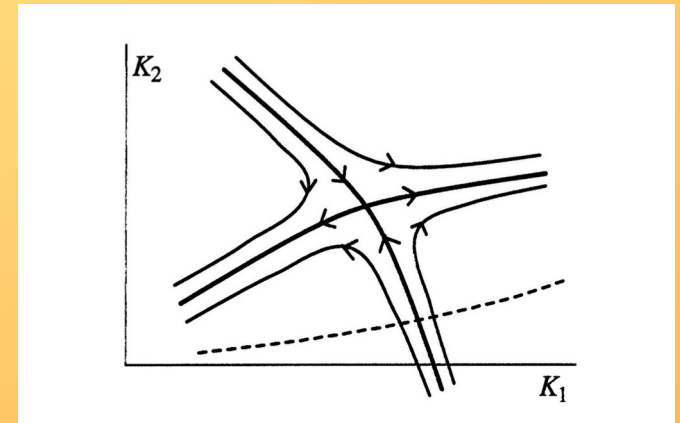


Diagrama de fluxo



Função beta

$$\frac{dK_a}{d\ell} = -\beta_a(K)$$

Pontos fixos

$$\beta_a(\{K^*\}) = 0$$

Autovalores de

$$\left(\frac{\partial \beta_a}{\partial K_b} \right)$$

Expoentes críticos

Expoente crítico	lei de potência	variável termodinâmica
α	$C \sim t ^{-\alpha}$	Calor específico
β	$M \sim (-t)^{-\beta}$	Magnetização
γ	$\chi = \partial M / \partial H \sim t ^{-\gamma}$	suscetibilidade
δ	$M _{T_c} \sim h ^{1/\delta}$	Magnetização no ponto crítico
ν	$\xi \sim t ^{-\nu}$	Comprimento de correlação
η	$G(r) _{T_c} \sim 1/ r ^{d-2+\eta}$	Função de correlação magnética
z	$\tau \sim \xi^z$	Tempo de relaxação

Dinâmica

Pergunta: Se introduzirmos uma perturbação dependente do tempo, e em um instante de tempo apagamos a perturbação:

– **O sistema volta ao equilíbrio? Quanto demora?**

-As propriedades estáticas são determinadas pela simetria e a dimensionalidade

-A dinâmica é muito mais complexa. Ela depende em geral das grandezas conservadas no sistema e não da simetria.

-A dinâmica do parâmetro de ordem não depende da dinâmica microscópica

Contexto Geral

-Mecânica Estatística Fora do Equilíbrio Termodinâmico

Não existe um formalismo fechado como na Mecânica Estatística do Equilíbrio (teorema ergódico, ensembles estatísticos, função de partição, etc.)

-Uma das abordagens: Processos Estocásticos

Dinâmica de Langevin: O Ponto Fixo Gaussiano

Equação de Langevin para o parâmetro de ordem

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\Gamma \otimes \frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} + \eta(\mathbf{x}, t)$$

Ruído branco

$$\begin{aligned}\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle &= 0 \\ \langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle &= 2k_B T \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')\end{aligned}$$

O modelo gaussiano

$$H = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{r}{2!} \phi^2 \right) d^d x$$

Função de correlação temporal

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, 0) \rangle \sim \frac{e^{-t/\tau}}{(\Gamma t)^{d/2}}$$

Tempo de equilibração

$$\tau \sim \xi^z$$

Ponto crítico

$$\xi \rightarrow \infty \longrightarrow \tau \rightarrow \infty$$

Expoente crítico dinâmico

$$z = \begin{cases} 2 & \text{para } \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \Gamma_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & \text{parâmetro de ordem não-conservado} \\ 4 & \text{para } \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \Gamma_0 \nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & \text{parâmetro de ordem conservado} \end{cases}$$

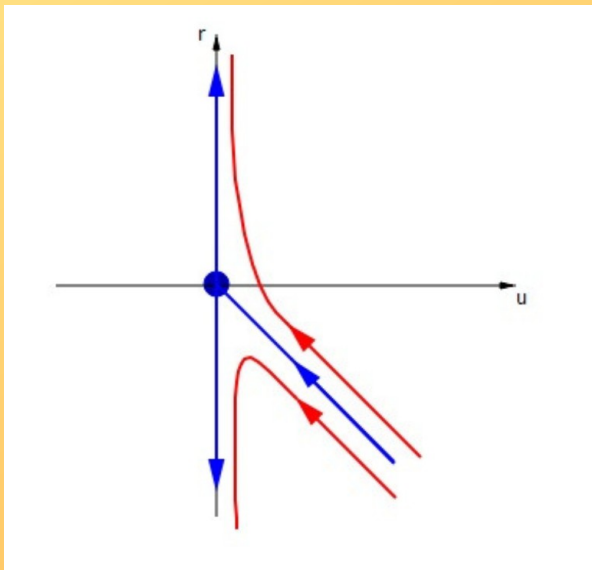
Existe mais de uma classe de universalidade dinâmica para o mesmo ponto crítico!!!!

Modelo ϕ^4 : Propriedades Estáticas

$$H = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{r}{2!} \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \right) d^d x$$

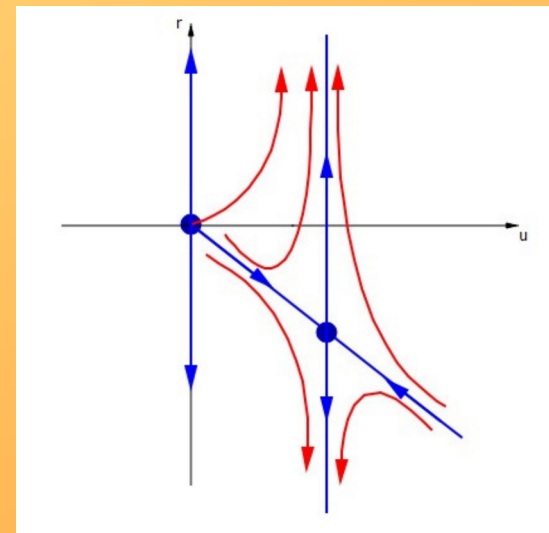
Duas constantes de acoplamento: $\{r, u\}$

Diagramas de Fluxo- Dimensão crítica superior $d=4$



$d > 4$

Ponto fixo Gaussiano



$d < 4$

Ponto fixo de Wilson-Fisher

Phys.Rev. Lett. **28**, 240 (1972).

Funcional Gerador

-Supersymmetric formulation of multiplicative white-noise stochastic processes

Zochil González Arenas, Daniel G. Barci, Phys. Rev. **E85**, 041122 (2012).

-Hidden symmetries and equilibrium properties of multiplicative white-noise stochastic processes

Zochil González Arenas, Daniel G. Barci, J. Stat. Mech. P12005 (2012).

Ruído Multiplicativo

Equação de Langevin

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} + G(\phi^2) \eta(\mathbf{x}, t)$$

$$G^2(\phi^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi^{2n}$$

Funcional gerador MSRJD

$$Z[J_\phi, J_\varphi] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{-S[\phi, \varphi, \bar{\xi}, \xi] + \int d^d x dt \{ J_\phi \phi + J_\varphi \varphi \}}$$

“Ação”

$$S = \int_{\frac{1}{\Lambda}} d^d x dt i\varphi \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta H}{\delta \phi} + \Gamma G \frac{\delta G}{\delta \phi} \bar{\xi} \xi \right\} + \frac{\Gamma}{2} G^2 \varphi^2$$

$$- \int_{\frac{1}{\Lambda}} d^d x dt d^d x' dt' \bar{\xi}(\mathbf{x}, t) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \xi(\mathbf{x}, t)$$

Núcleo Fermiônico

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{d\delta(t - t')}{dt} + \frac{\Gamma}{2} \frac{\delta^2 H}{\delta \phi(\mathbf{x}, t) \delta \phi(\mathbf{x}', t)}$$

Grupo de Renormalização Dinâmico

P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).

Transformação do Grupo de Renormalização

Ação efetiva

$$e^{-S'_{\Lambda/b}} = \int \mathcal{D}\phi^> \mathcal{D}\varphi^> \mathcal{D}\bar{\xi}^> \mathcal{D}\xi^> e^{-S_{\Lambda}[\phi, \varphi, \bar{\xi}, \xi]}$$

Re-escalamento

$$\begin{aligned}k' &= bk, \omega' = b^z \omega \\ \varphi^<(k'/b, \omega'/b^z) &= b^{\frac{d-2+2z}{2} - \eta_1} \varphi(k', \omega') \\ \phi^<(k'/b, \omega'/b^z) &= b^{\frac{d+2+2z}{2} + \eta_2} \phi(k', \omega') \\ \bar{\xi}^<(k'/b, \omega'/b^z) &= b^{\frac{d}{2} + \eta_3} \bar{\xi}(k', \omega') \\ \xi^<(k'/b, \omega'/b^z) &= b^{\frac{d}{2} + \eta_3} \xi(k', \omega')\end{aligned}$$

Transformação infinitesimal

$$b = 1 + \delta\ell, \text{ with } \delta\ell \ll 1.$$

Fluxo no espaço de constantes de acoplamento

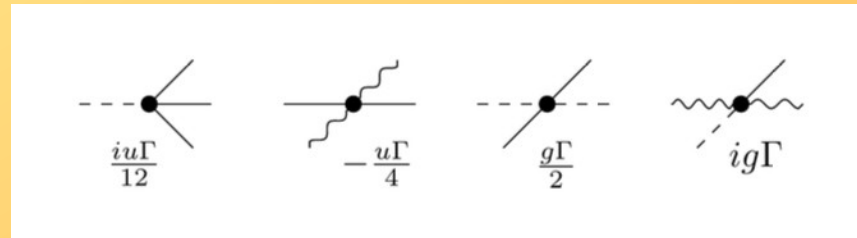
$$\{r(\ell), u(\ell), \Gamma(\ell), g(\ell)\}$$

Grupo de Renormalização perturbativo

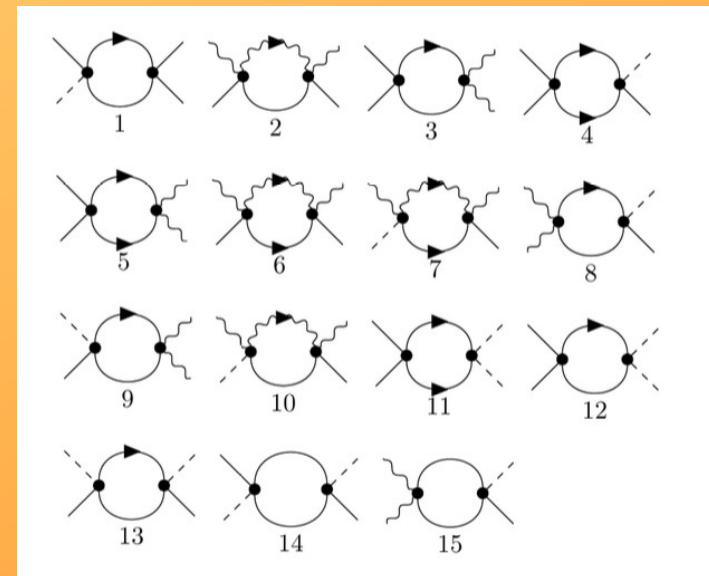
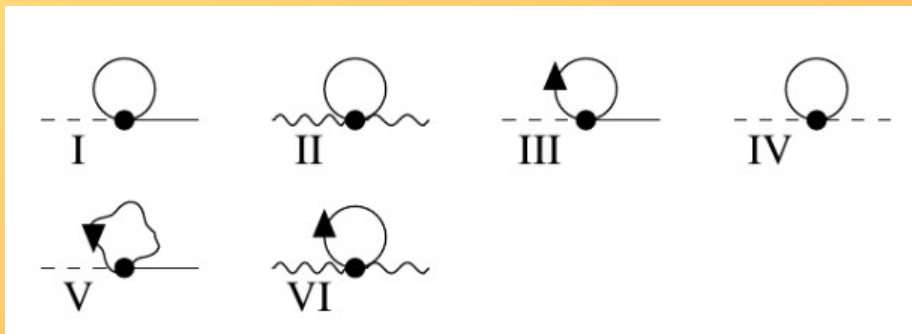
$$S'_{\Lambda/b} = S^< + \langle S_I \rangle_{S_0^>} - \frac{1}{2} \left(\langle S_I^2 \rangle_{S_0^>} - \langle S_I \rangle_{S_0^>}^2 \right)$$

Diagramas de Feynman

Vértices



Correções a um laço



Grupo de Renormalização Dinâmico a um laço

Nathan O. Silvano and Daniel G. Barci, arXiv:2112.01547 (2021).

Equações do Grupo de Renormalização

$$\frac{dr}{d\ell} = 2r + \frac{1}{2} \frac{u}{1+r} - 2\alpha g$$

$$\frac{du}{d\ell} = (4-d)u - \frac{3}{2} \frac{u^2}{(1+r)^2} + 4 \frac{ug}{1+r}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\ell} = \{z-2\} \Gamma$$

$$\frac{dg}{d\ell} = (2-d)g + \frac{g^2}{1+r} - \frac{5}{2} \frac{gu}{(1+r)^2} + \frac{1}{4} \frac{u^2}{(1+r)^3}$$

→ Dimensão crítica superior $d=4$

→ $z=2$ expoente crítico dinâmico

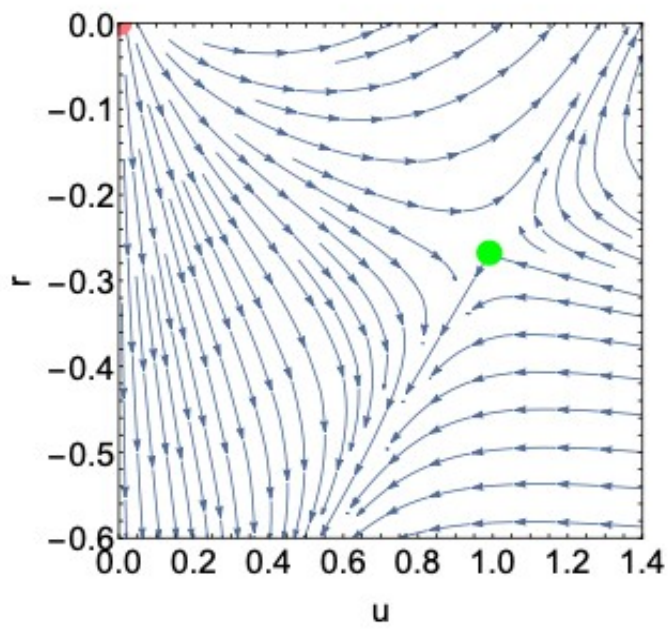
$d \sim 4$ g é Irrelevante

$d=2$ g é Marginalmente Relevante

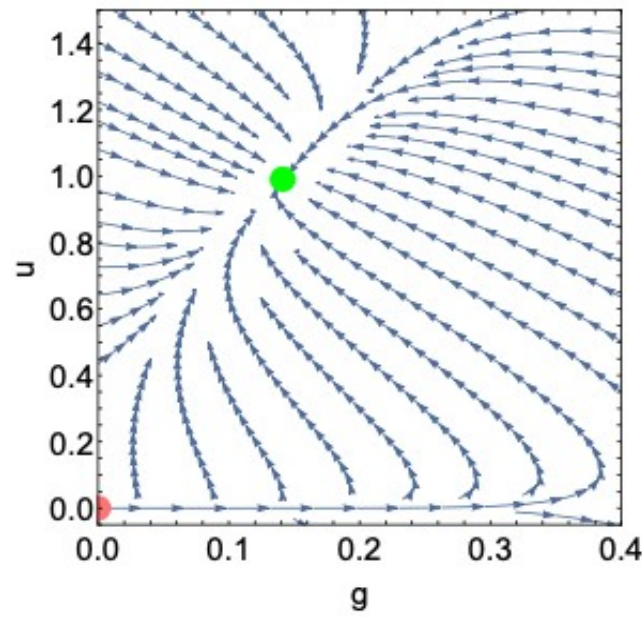
Novos pontos fixos !

Fluxo do Grupo de Renormalização Dinâmico

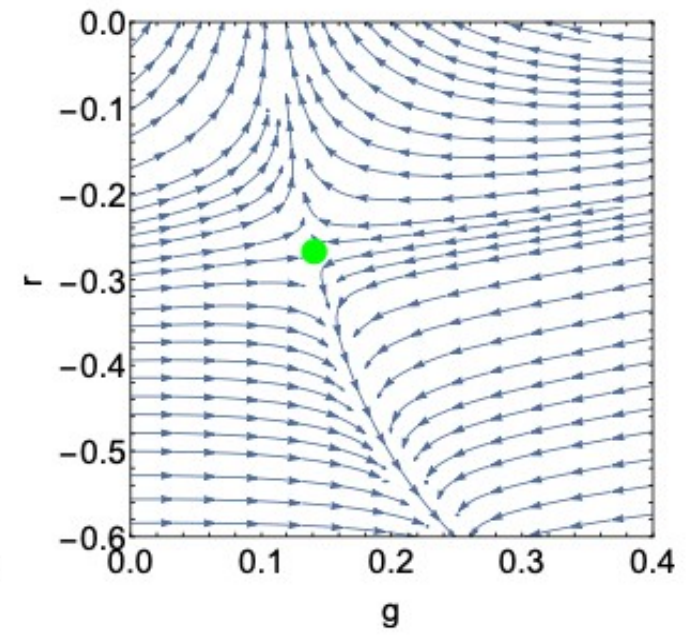
Ponto Fixo Multiplicativo



(a)



(b)



(c)

Resumo e Perspetivas

- Dinâmica Crítica de um campo escalar real.
- Perto da dimensão crítica superior, os acoplamentos multiplicativos são irrelevantes.
- Porém, para $d=2$, o ruído multiplicativo é marginalmente relevante e o ponto fixo gaussiano flui para um novo ponto fixo.
- Cálculo a dois loops proximamente!
- Grupo de Renormalização não-perturbativo
- Dinâmica de Transições do tipo de Kosterlitz-Thouless
- Dinâmica de defeitos topológicos: vórtices e monopolos

Grazie

Agradecido

Danke

Gracias

Thank You

Thanks

Obrigado

Merci

Gratidão