

Fases Cristalinas em QCD

Theo F. Motta (JLU Gießen & TU Darmstadt)

10 de Junho, 2024 IFUSP

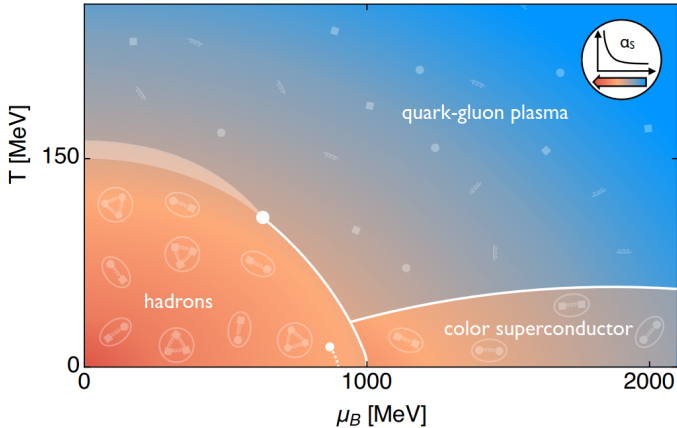
em colaboração com J. Bernhardt, M. Buballa & C.S. Fischer

Based on [Phys.Rev.D 108 (2023)] & [arXiv 2406.00205]

Fases Inhomogêneas em QCD

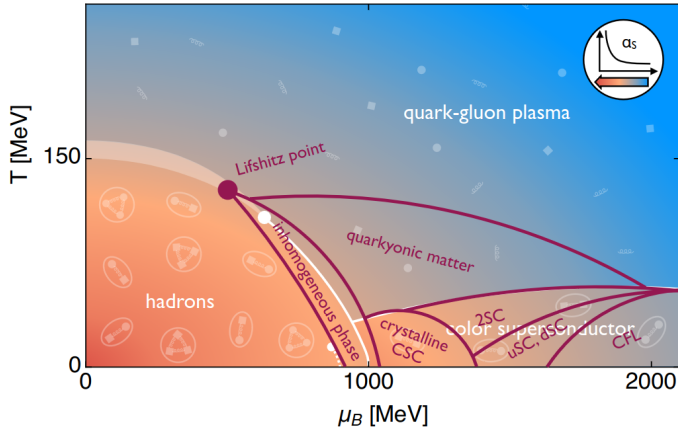
Quebra Homogênea de Simetria Quiral

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(\not{D} + m_q)\psi$$



Quebra Homogênea de Simetria Quiral

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(\not{D} + m_q)\psi$$



Quebra *Inhomogênea* de Simetria Quiral

Quebra *Inhomogênea* de Simetria Quiral

- Simetria quiral preservada

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$$

Quebra *Inhomogênea* de Simetria Quiral

- Simetria quiral preservada

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$$

- Simetria quiral quebrada

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$$

Quebra *Inhomogênea* de Simetria Quiral

- Simetria quiral preservada

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$$

- Simetria quiral quebrada

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$$

- Quebra inhomogênea

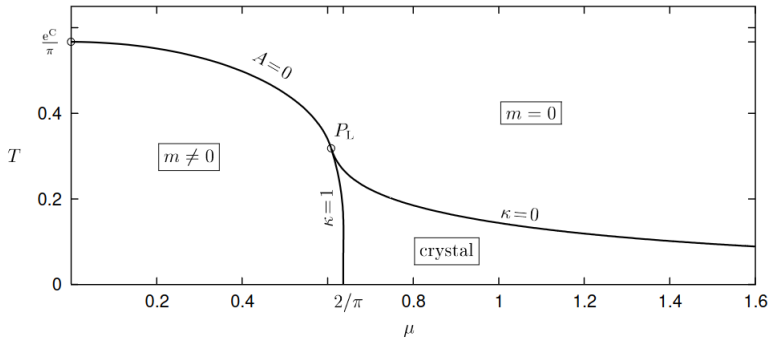
$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \phi(x)$$

i.e. Simetria de translação também foi quebrada

Modelo de Gross-Neveu

- Pega o modelo GN em 1+1 dimensões

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m) \psi + G\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$$

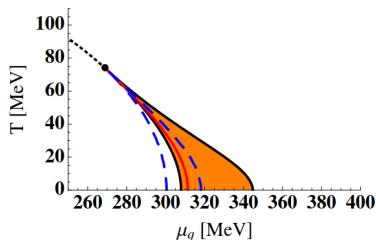
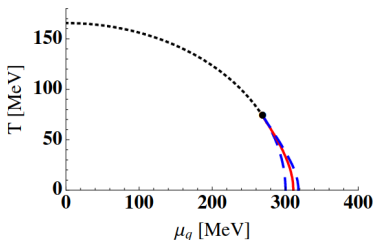


[M. Theis | J.Phys.A 39 (2006)]

Modelo de Nambu-Jona-Lasinio

- O modelo de NJL é similar. Agora em 3+1 dimensões eu tenho um vértice escalar e um pseudoescalar

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi + G ((\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2)$$

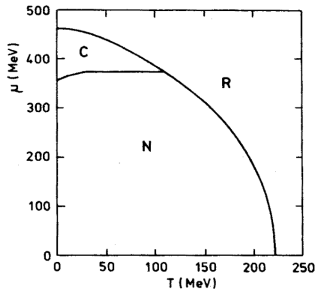


[D. Nickel | Phys.Rev.D 80 (2009)]

Modelo Quark-Meson

- O modelo QM...

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + g (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + U[\sigma, \pi]$$

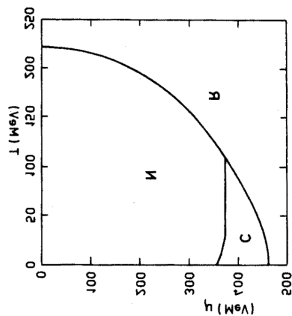


[W. Broniowski, et al | Acta Phys.Polon.B 22 (1991)]

Modelo Quark-Meson

- O modelo QM...

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})) \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + U[\sigma, \pi]$$

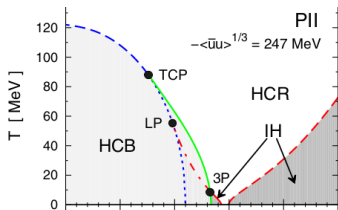
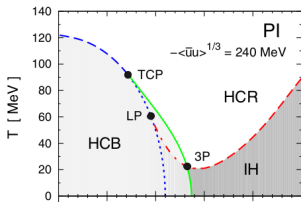


[W. Broniowski, et al | Acta Phys.Polon.B 22 (1991)]

E $U_{q\bar{q}}$ Não-Local?

- Modelos de potencial não-local

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m) \psi(x) + (G(z)\bar{\psi}(x + z/2)\bar{\psi}(x - z/2))^2$$



[J. P. Carlomagno, et al | Phys. Rev. D 92, 056007 (2015)]

Exemplo: NJL (em MFA)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right\}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right\}$$

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \langle \bar{\psi}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \rangle, \quad \phi_P(\mathbf{x}) = \langle \bar{\psi}(\mathbf{x})i\gamma_5\tau^3\psi(\mathbf{x}) \rangle$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right\}$$

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \langle \bar{\psi}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \rangle, \quad \phi_P(\mathbf{x}) = \langle \bar{\psi}(\mathbf{x})i\gamma_5\vec{\tau}\psi(\mathbf{x}) \rangle$$

↓ Energia Livre em MFA ↓

$$\Omega_{\text{MF}}[\phi] = -\frac{T}{V} \text{Tr} \log \left(\frac{S_0^{-1} + G(\phi_S(\mathbf{x}) + \phi_P(\mathbf{x}))}{T} \right) \\ + G \frac{1}{V} \int d^3x (\phi_S^2(\mathbf{x}) + \phi_P^2(\mathbf{x}))$$

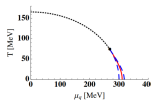
Diagrama de Fase Homogêneo no Modelo NJL

- O caso homogêneo é

$$\Omega_{\text{MF}}[\bar{\phi}] = -\frac{T}{V} \text{Tr} \log \left(\frac{S_0^{-1} + G(\bar{\phi}_S + \bar{\phi}_P)}{T} \right) + G \frac{1}{V} \int d^3x (\bar{\phi}_S^2 + \bar{\phi}_P^2)$$

- Procura os pontos estacionários

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \bar{\phi}} = 0 \quad \Rightarrow$$



$$\phi_S(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_S + \delta\phi_S(\mathbf{x})$$

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_S + \delta\phi_S(\mathbf{x})$$

$$\Omega_{\text{MF}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}, \quad \Omega^{(n)} \propto \mathcal{O}(\delta\phi_S^n)$$

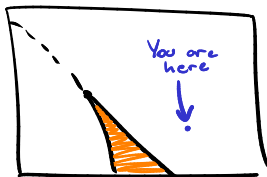
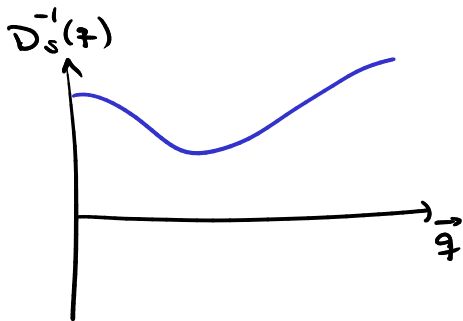
$$\phi_S(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_S + \delta\phi_S(\mathbf{x})$$

$$\Omega_{\text{MF}} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}, \quad \Omega^{(n)} \propto \mathcal{O}(\delta\phi_S^n)$$

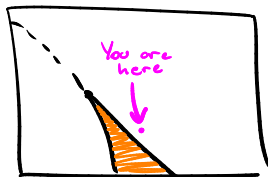
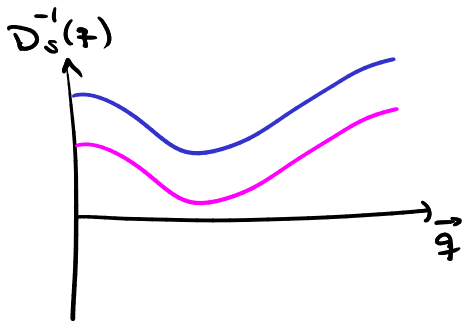
↓ Leading Order ↓

$$\Omega^{(2)} = \frac{2G^2}{V} \int_{\vec{q}} |\delta\phi_S(\vec{q})|^2 D_S^{-1}(\vec{q})$$

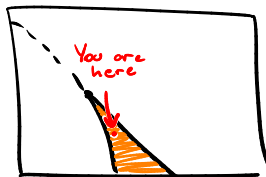
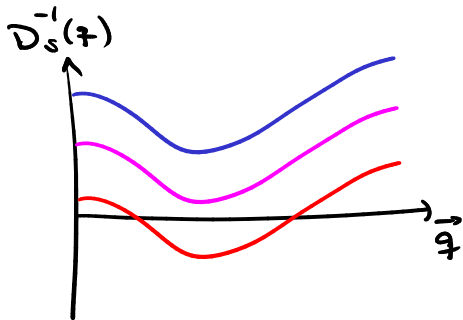
Análise de Estabilidade



Análise de Estabilidade

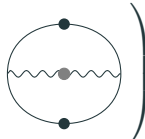


Análise de Estabilidade

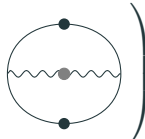


Rumo à QCD: Análise de Estabilidade 2PI

- Calcula energia livre pela ação efetiva (2PI)

$$\Omega[S] = \frac{T}{V} \left(\text{Tr} \log [S] + \text{Tr} [\mathbf{1} - S_0^{-1}S] + \frac{1}{2} \text{Diagram} \right)$$
A Feynman diagram representing a self-energy loop. It consists of a circle with two external vertices (black dots) at the top and bottom. Inside the circle, there is a wavy line (representing a ghost loop) and a straight line (representing a fermion loop) that cross each other. A central dot is located at the intersection of the wavy and straight lines.

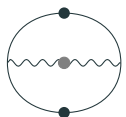
- Calcula energia livre pela ação efetiva (2PI)

$$\Omega[S] = \frac{T}{V} \left(\text{Tr} \log [S] + \text{Tr} [\mathbf{1} - S_0^{-1}S] + \frac{1}{2} \text{Diagram} \right)$$


- Expande ao redor do *propagador* homogêneo

$$S(k_1, k_2)$$

- Calcula energia livre pela ação efetiva (2PI)

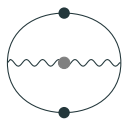
$$\Omega[S] = \frac{T}{V} \left(\text{Tr} \log [S] + \text{Tr} [\mathbf{1} - S_0^{-1}S] + \frac{1}{2} \text{Diagram} \right)$$


- Expande ao redor do *propagador* homogêneo

$$S(k_1, k_2) = \bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2)$$

Análise de Estabilidade

- Calcula energia livre pela ação efetiva (2PI)

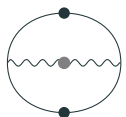
$$\Omega[S] = \frac{T}{V} \left(\text{Tr} \log [S] + \text{Tr} [\mathbf{1} - S_0^{-1}S] + \frac{1}{2} \text{Diagram} \right)$$


- Expande ao redor do *propagador* homogêneo

$$S(k_1, k_2) = \bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2) + \delta S(k_1, k_2)$$

Análise de Estabilidade

- Calcula energia livre pela ação efetiva (2PI)

$$\Omega[S] = \frac{T}{V} \left(\text{Tr} \log [S] + \text{Tr} [1 - S_0^{-1}S] + \frac{1}{2} \text{Diagram} \right)$$


- Expande ao redor do *propagador* homogêneo

$$S(k_1, k_2) = \bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2) + \delta S(k_1, k_2)$$

- Calcula o termo leading order

$$\Omega^{(2)}[\delta S] = \text{Tr} \left[\overline{\frac{\delta^2 \Omega}{\delta S \delta S}} \delta S \delta S \right] \neq \int |\delta S|^2 \times f(k_1, k_2)$$

Equações de Schwinger-Dyson

Equações de Schwinger-Dyson

- Como eu obtenho meu propagador *homogêneo* $\bar{S}(k)$?

Equações de Schwinger-Dyson

- Como eu obtenho meu propagador *homogêneo* $\bar{S}(k)$?
- A energia livre homogênea deve ser

$$\Omega_H[\bar{S}(k_1)] = \Omega[\bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2)]$$

Equações de Schwinger-Dyson

- Como eu obtenho meu propagador *homogêneo* $\bar{S}(k)$?
- A energia livre homogênea deve ser

$$\Omega_H[\bar{S}(k_1)] = \Omega[\bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2)]$$

- Preciso achar pontos estacionários da energia livre

$$\frac{\delta\Omega_H}{\delta\bar{S}} = 0$$

Equações de Schwinger-Dyson

- Como eu obtenho meu propagador *homogêneo* $\bar{S}(k)$?
- A energia livre homogênea deve ser

$$\Omega_H[\bar{S}(k_1)] = \Omega[\bar{S}(k_1)\delta(k_1 - k_2)]$$

- Preciso achar pontos estacionários da energia livre

$$\frac{\delta\Omega_H}{\delta\bar{S}} = 0$$

- Equações de Schwinger-Dyson!

The diagrammatic equation is: $\text{---}\bullet\text{---}^{-1} = \text{---}\bullet\text{---}^{-1} + \text{---}\bullet\text{---}^{-1} \text{ (with a wavy loop on top)}$

Diagrama de Fase Homogêneo

- Pega por exemplo o modelo Qin-Chang pro potencial

$$\text{wavy line with dot} = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \times \lambda e^{q^2/\omega^2}$$

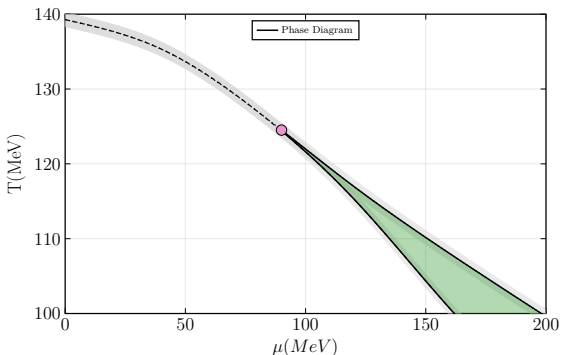
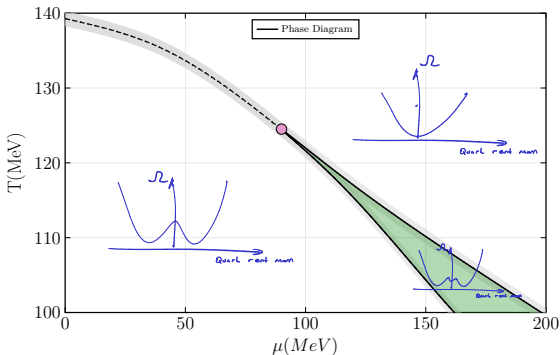


Diagrama de Fase Homogêneo

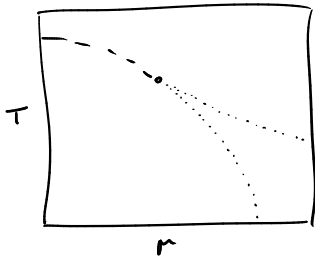
- Pega por exemplo o modelo Qin-Chang pro potencial

$$\text{wavy line with dot} = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \times \lambda e^{q^2/\omega^2}$$



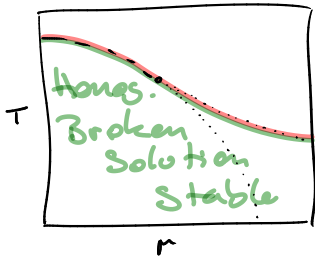
A Análise

- A análise é não trivial
 - Precisa de uma “função-teste” δS
 - Uso um método variacional pra fixar os parâmetros da função-teste.
 - Se o espaço de parâmetros for muito pequeno eu vou obter resultados **errados!** É bom ter um teste de segurança...



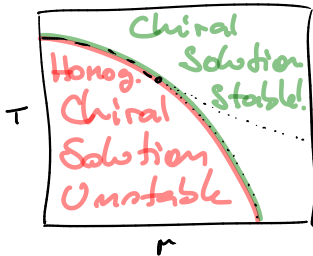
A Análise

- A análise é não trivial
 - Precisa de uma “função-teste” δS
 - Uso um método variacional pra fixar os parâmetros da função-teste.
 - Se o espaço de parâmetros for muito pequeno eu vou obter resultados **errados!** É bom ter um teste de segurança...



A Análise

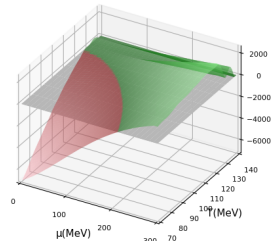
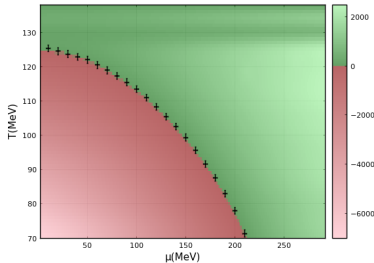
- A análise é não trivial
 - Precisa de uma “função-teste” δS
 - Uso um método variacional pra fixar os parâmetros da função-teste.
 - Se o espaço de parâmetros for muito pequeno eu vou obter resultados **errados!** É bom ter um teste de segurança...



O Teste da Spinoidal

- Testa quebra de simetria quiral *homogênea*

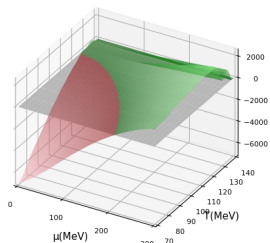
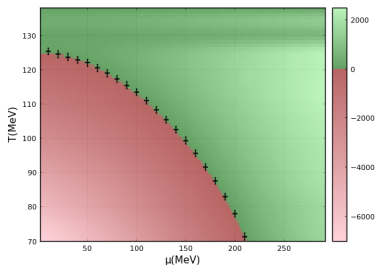
$$S(k) = S(k)_{\text{chiral}} + \delta S(k)_{\text{breaks chiral symmetry}}$$



O Teste da Spinoidal

- Testa quebra de simetria quiral *homogênea*

$$S(k) = S(k)_{\text{chiral}} + \delta S(k)_{\text{breaks chiral symmetry}}$$

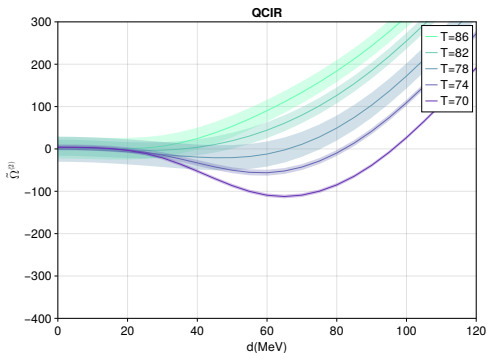


Agora eu quebro a simetria de translação

$$\delta S(k) \rightarrow \delta S(k_1, k_2)$$

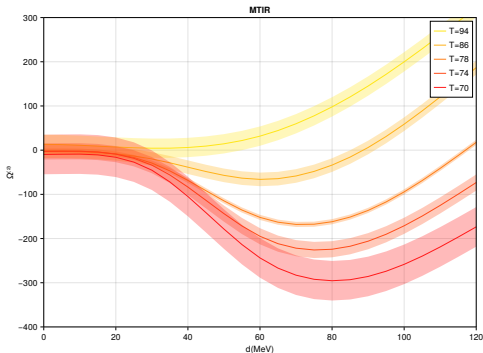
Quebra de Simetria de Translação

- Fora do caso homogêneo (onde $d = k_1 - k_2 = 0$), a gente não tem um teste.
- Portanto, no momento, a gente só consegue ter *certeza* da estabilidade ao longo da linha spinoidal.

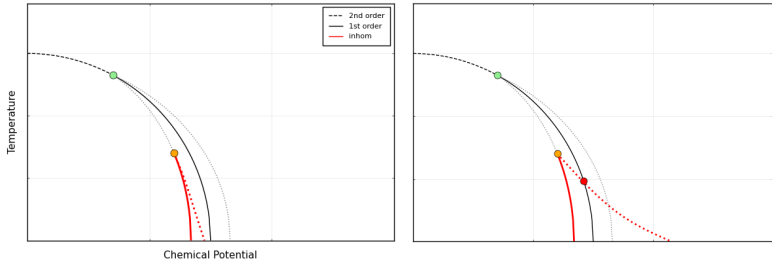


Quebra de Simetria de Translação

- Fora do caso homogêneo (onde $d = k_1 - k_2 = 0$), a gente não tem um teste.
- Portanto, no momento, a gente só consegue ter *certeza* da estabilidade ao longo da linha spinoidal.



Conclusões



- A instabilidade da solução quiral com respeito a quebra de simetria de translação existe!
- É certo que ela persiste para μ maiores se quanto menor a temperatura.
- Logo, dois casos são possíveis. Ou ela cruza a linha da transição de fase de 1a ordem, ou não...

Thanks

backup

Quantum Fluctuations

- The Landau-Peierls instability states that 1-dimensional condensates in 2^+ spacial dimensions are unstable. Due to transverse **phonon** fluctuations.

Crystal \rightarrow Liquid Crystal

- The Pisarski-Tsvetlik-Valgushev (PTV) instability states that transverse bosonic fluctuations by Nambu-Goldstone bosons from **flavour** symmetry breaking disorder these phases.

Crystal \rightarrow Quantum Pion Liquid

- See Refs by Pisarsky, Renneke, Hidaka, de la Incera & Ferrer, etc

Ansatz in NJL

- Chiral-Density-Wave (CDW):

$$\phi_S(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_S} \cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), \quad \phi_P(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_P} \sin(\vec{q} \cdot \vec{x})$$

Ansatz in NJL

- Chiral-Density-Wave (CDW):

$$\phi_S(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_S} \cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), \quad \phi_P(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_P} \sin(\vec{q} \cdot \vec{x})$$

- Real-Kink-Crystal (RKC):

$$M(x) = \Delta \sqrt{\nu} \operatorname{sn}(\Delta x | \nu)$$

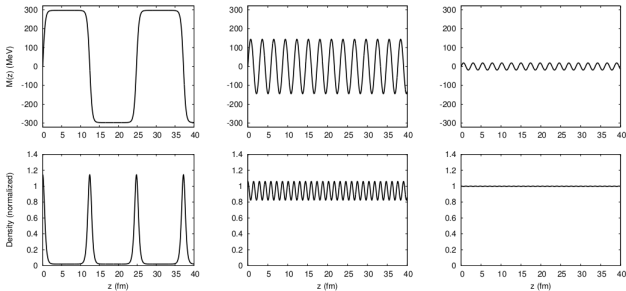
Ansatz in NJL

- Chiral-Density-Wave (CDW):

$$\phi_S(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_S} \cos(\vec{q} \cdot \vec{x}), \quad \phi_P(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_P} \sin(\vec{q} \cdot \vec{x})$$

- Real-Kink-Crystal (RKC):

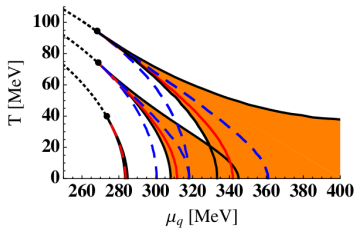
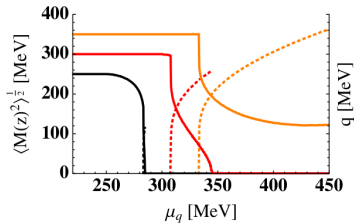
$$M(x) = \Delta \sqrt{\nu} \operatorname{sn}(\Delta x | \nu)$$



$$\Omega_{\text{MF}} = -\frac{T}{V} \text{Tr} \log \left(\frac{S^{-1}}{T} \right) + G \frac{1}{V} \int d^3x (\phi_S^2(\mathbf{x}) + \phi_P^2(\mathbf{x}))$$

Ansatz in NJL

$$\Omega_{\text{MF}} = -\frac{T}{V} \text{Tr} \log \left(\frac{S^{-1}}{T} \right) + G \frac{1}{V} \int d^3x (\phi_S^2(\mathbf{x}) + \phi_P^2(\mathbf{x}))$$



$$\phi_S(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_S} \cos(\vec{q} \cdot \vec{x}),$$

$$\phi_P(\vec{x}) = -\frac{\Delta}{2G_P} \sin(\vec{q} \cdot \vec{x})$$