

Axionic Wormholes and Quality Problem

永田夏海

東京大学

Aso Workshop on Particle Physics and Cosmology 2023

阿蘇の司

2023年11月13日

Outline

- ▶ Introduction: Axion Quality Problem
- ▶ Wormholes
- ▶ Our work
- ▶ Discussion

Introduction: Axion Quality Problem

CP violation

標準模型の弱い相互作用は、**CP対称性**を破っている。

その起源は、**CKM行列**中の複素位相:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

● 3世代では、物理的な位相はただ一つ。

M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).

● O(1) の値: $\delta \simeq 1.2 \simeq 69^\circ$

弱い相互作用におけるCP対称性の破れは、一般的かつ自然に導入されている。



Strong CP problem

強い相互作用においても，CP対称性は破れうる。

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{g_s^2}{32\pi^2} \theta_G G_{\mu\nu}^A \tilde{G}^{A\mu\nu} - \sum_q [m_q e^{i\theta_q} \bar{q}_R q_L + \text{h.c.}] \quad \tilde{G}_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{A\rho\sigma}$$

これらの項は，中性子電気双極子モーメントを誘導する。

$$\rightarrow \underline{d_n = 8.2 \times 10^{-17} \bar{\theta} e \cdot \text{cm}} \quad \bar{\theta} = \theta_G + \sum_q \theta_q$$

K. Fuyuto, J. Hisano, N. Nagata, Phys. Rev. **D87**, 054018 (2013).

nEDM collaboration

$$|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} e \cdot \text{cm} \quad \rightarrow \quad |\bar{\theta}| \lesssim 10^{-10}$$

何故こんなに小さいのか？

Strong CP problem

Peccei-Quinn mechanism

R. D. Peccei and H. R. Quinn (1977):

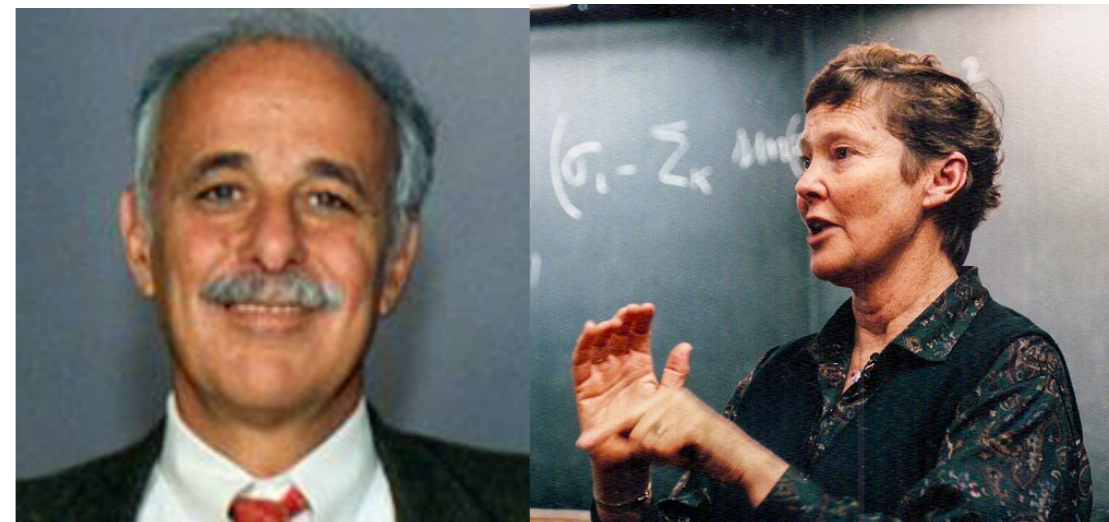
強い相互作用のもとでアノマリーを持つような大域的
U(1) 対称性を導入.

➔ Peccei-Quinn (PQ) 対称性

- この対称性は, あるスケールにおいて自発的に破れる.
- 擬南部・ゴールドストーン粒子が現れる.

➔ アクシオン

S. Weinberg (1978); F. Wilczek (1978).



Peccei-Quinn mechanism

PQ変換のもとで、アクシオン場は次のようにシフトする:

$$a \rightarrow a + f_a \alpha \quad (f_a : \text{アクシオン崩壊定数})$$

アノマリーを再現するように、次の有効相互作用を持つ:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g_s^2}{32\pi^2 f_a} a G_{\mu\nu}^A \tilde{G}^{A\mu\nu}$$

QCD閉じ込め後、アクシオンポテンシャルが誘導される。

$$V(a) \simeq \frac{1}{2} \mathcal{T} \left(\frac{a}{f_a} + \bar{\theta} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\langle a \rangle}{f_a} + \bar{\theta} = 0 \quad m_a^2 = \frac{\mathcal{T}}{f_a^2}$$

$\mathcal{T} \simeq \Lambda_{\text{QCD}}^4$: topological susceptibility

真空中でCP対称性保存

Achilles' heel of PQ mechanism

PQ機構は

▶ QCD非摂動効果

▶ クォーク質量

によるととても些細なPQ対称性の破れの効果に依存している。

PQ対称性を破る他の効果に影響されやすい。

一方で、任意の大域的対称性は重力の効果で破れていると考えられている。

See, e.g., T. Banks and N. Seiberg, Phys. Rev. D **83**, 084019 (2011).

➔ 重力によるPQ対称性の破れの影響は如何程か？

Effective theoretical approaches

有効演算子を用いた議論により，重力によるPQ対称性の破れの影響は**大きすぎる**のではないかという懸念が示された。

H. M. Georgi, L. J. Hall, and M. B. Wise (1981); M. Dine and N. Seiberg (1986);
M. Kamionkowski and J. March-Russell (1992); S. M. Barr and D. Seckel (1992);
R. Holman, S. D. H. Hsu, T. W. Kephart, E. W. Kolb, R. Watkins, and L. M. Widrow (1992);
S. Ghigna, M. Lusignoli, and M. Roncadelli (1992).

PQ対称性を破る演算子

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{c_n}{M_P^{(n-4)}} \Phi^n + \text{h.c.} \quad \Phi: \text{PQ場} \quad \Phi \rightarrow \frac{f_a}{\sqrt{2}} e^{i\frac{a}{f_a}}$$

$$\rightarrow V(a) = -2|c_n| M_P^4 \left(\frac{f_a}{\sqrt{2} M_P} \right)^n \cos \left(\frac{na}{f_a} + \delta_n \right) \quad \delta_n \equiv \arg(c_n)$$

これにより，アクシオン場がCP保存点からズレる。

$$\frac{|\Delta a|}{f_a} \simeq 2n |c_n \sin \delta_n| \left(\frac{M_P}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)^4 \left(\frac{f_a}{\sqrt{2} M_P} \right)^n$$

Axion quality problem

Strong CPを避けるためには, $\frac{|\Delta a|}{f_a} \lesssim 10^{-10}$ が必要.

例えば, $f_a \simeq 10^{10}$ GeV の時, $n \sim 10$ までの演算子の係数を非常に小さくしなくてはならない.

➔ Axion quality problem

模型構築による解決策

- ゲージ・セクターをうまく拡張

PQ対称性を破る低エネルギー演算子を書けなくする.

- 重いアクシオン模型

f_a の値を小さくとる.

などなど.

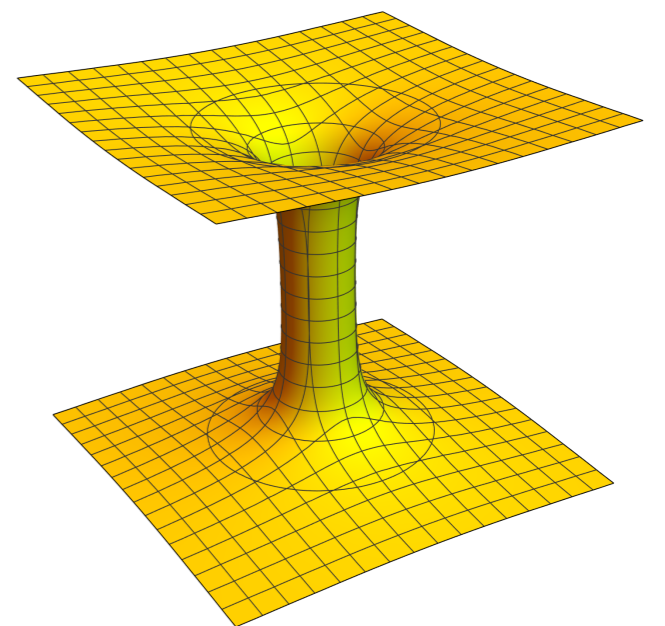
Wormholes

実際のところ、重力によるどのような効果によってPQ対称性の破れがもたらされるのでしょうか？

→ 重力インスタントン効果 / ワームホール

これを今からレビューします。

Wormholes



Giddings-Strominger wormhole

Nuclear Physics B306 (1988) 890–907
North-Holland, Amsterdam

AXION-INDUCED TOPOLOGY CHANGE IN QUANTUM GRAVITY AND STRING THEORY

Steven B. GIDDINGS

*Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA, and
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA**

Andrew STROMINGER

Department of Physics, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA

Received 23 October 1987
(Revised 23 November 1987)



アインシュタイン重力のもとでの
アクシオン理論のユークリッド
経路積分においてワームホール解を発見.

Giddings-Strominger wormhole

作用

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M_P^2}{2} R + \frac{f_a^2}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta \right]$$

球対称解を探す:

$$ds^2 = dr^2 + a(r)^2 d^2\Omega_3$$

$d^2\Omega_3$: 3次元空間要素

r : ユークリッド時間

鞍点解

● $J^\mu = \sqrt{g} g^{\mu\nu} f_a^2 \partial_\nu \theta$ $\partial_\mu J^\mu = 0$ シフト対称性

→ $n = \int d\Omega_3 J^0 = 2\pi^2 a^3(r) f_a^2 \theta'(r) = \text{const.}$

PQ電荷保存

Giddings-Strominger wormhole

鞍点解

- $g_{\mu\nu}$

$$3 \left(\frac{a'^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{f_a^2}{2M_P^2} \theta'^2 \qquad (2aa'' + a'^2 - 1) = \frac{f_a^2 a^2}{2M_P^2} \theta'^2$$

独立した条件では無いとわかる。

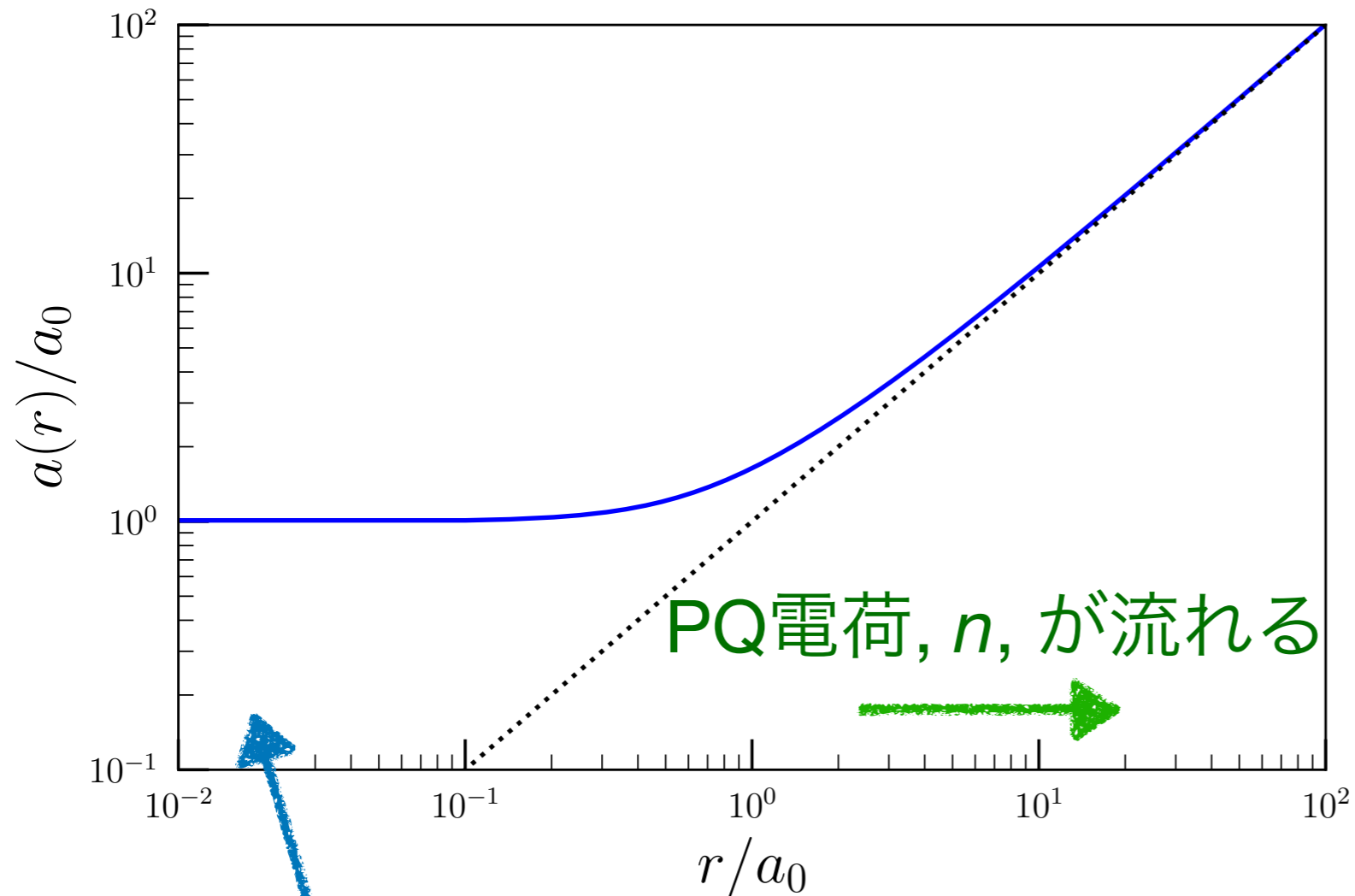


$$a'^2 = 1 - \frac{a_0^4}{a^4}$$

$$a_0 = \left(\frac{n^2}{24\pi^4 f_a^2 M_P^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

楕円積分を使って解を解析的に表せる。

Giddings-Strominger wormhole

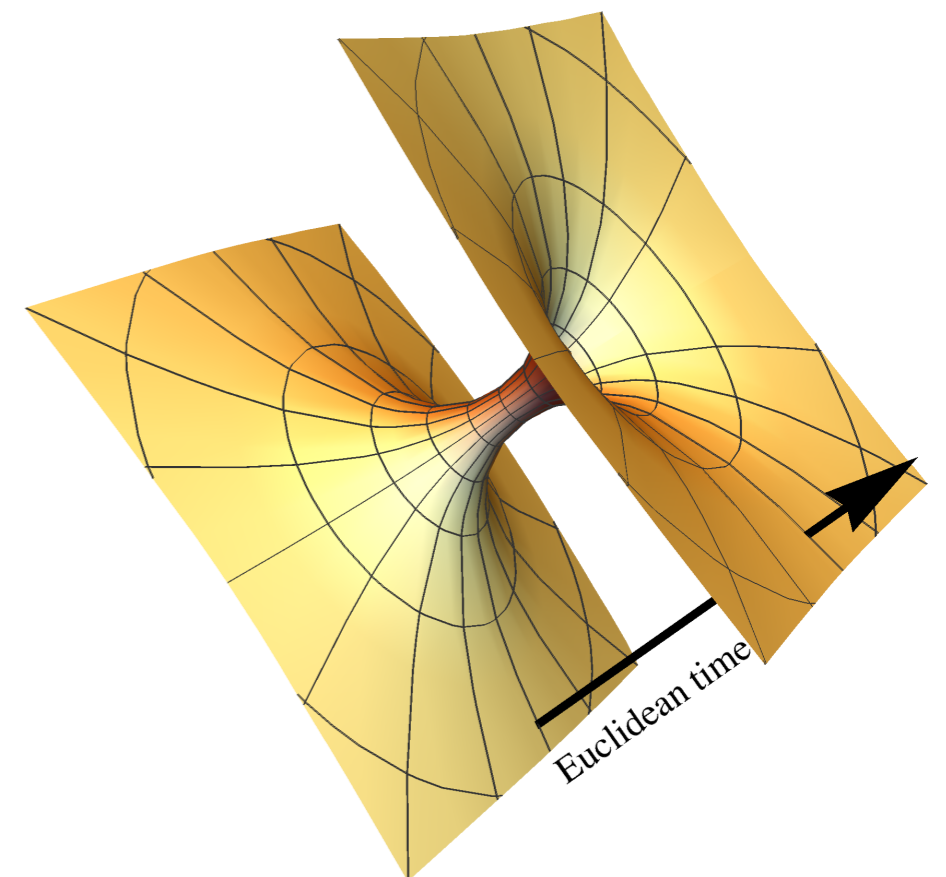


$$a(r) \rightarrow r \quad (r \rightarrow \infty)$$

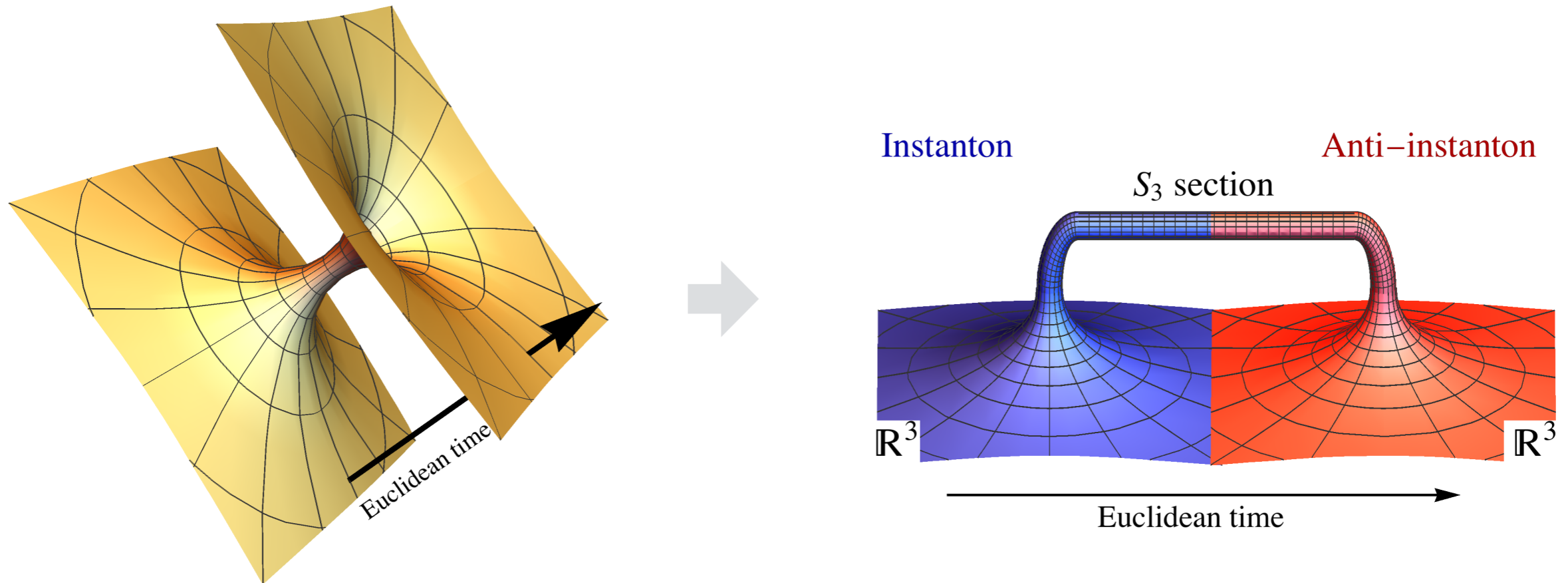
漸近的に平坦

ワームホールの首

$$a(0) = a_0 \quad a'(0) = 0$$



Giddings-Strominger wormhole



Taken from R. Alonso, A. Urbano, JHEP **02**, 136 (2019).

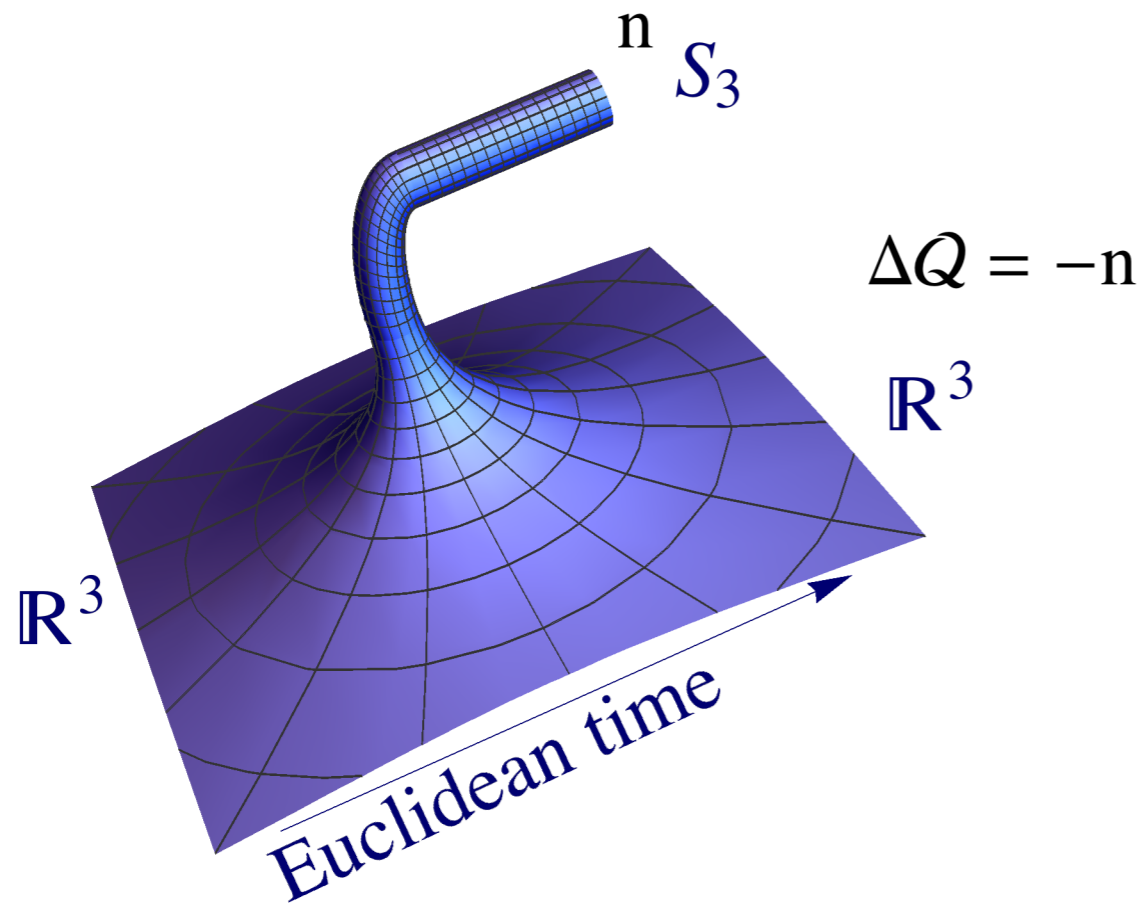
2つの漸近平坦領域を、同じ空間の異なる2つの部分とも
みなしうる。



ワームホールが2つの領域を繋ぐ

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \oplus S_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Wormholes as instantons



Taken from R. Alonso, A. Urbano, JHEP **02**, 136 (2019).

\mathbb{R}^3 にいる観測者には, PQ電荷が $\Delta Q = -n$ だけ変化したように見える.

➔ この観測者にとって, PQ電荷は保存しない.

Effective potential

これらの非摂動重力インスタントンは、次の形のアクシオンポテンシャルを誘導する。

S. J. Rey, Phys. Rev. D **39**, 3185 (1989).

$$\Delta V \simeq \frac{1}{a_0^4} e^{-S} \cos\left(\frac{a}{f_a} + \delta\right)$$

これによるアクシオン場のずれは

$$\frac{|\Delta a|}{f_a} \simeq |\sin \delta| \left(\frac{1}{\Lambda_{\text{QCD}} a_0}\right)^4 e^{-S} \simeq |\sin \delta| \left(\frac{24\pi^4 f_a^2 M_P^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^4}\right) e^{-S}$$

$\delta = \mathcal{O}(1)$ の時, $|\Delta a|/f_a \lesssim 10^{-10}$ が満たされるためには

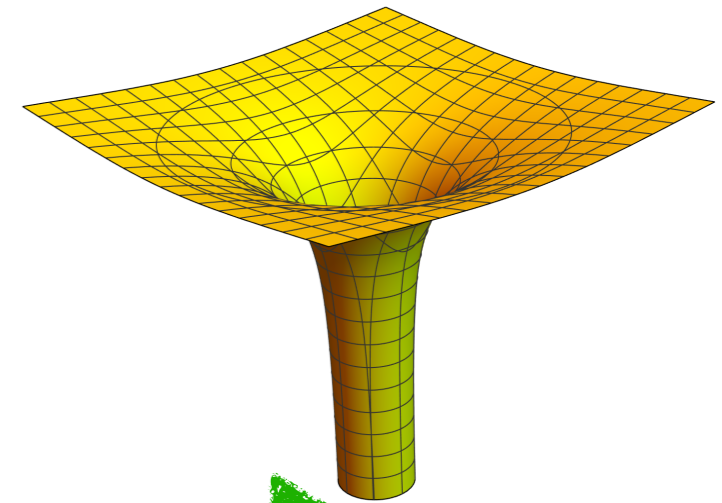
$$S \gtrsim 200$$

下限の値は対数的にしか f_a に依存しない。

Giddings-Strominger wormhole

ワームホール配位に対応する作用の値は

$$S = \sqrt{\frac{3\pi^2}{8} \frac{nM_P}{f_a}} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3\pi^2}{8} \frac{nM_P}{f_a}}$$



▶ この項は、境界条件からくる。

Gibbons-Hawking-York (GHY) 項

▶ 半ワームホール解の場合のみ存在。

$n = 1$ の場合

$$S \simeq 170 \times \left(\frac{f_a}{10^{16} \text{ GeV}} \right)^{-1} \rightarrow f_a \lesssim 10^{16} \text{ GeV}$$

この時ワームホールの寄与が十分に抑制される。

No quality problem?

ワームホールの寄与は十分小さそう？

クォリティ問題を心配する必要はないかも??

➔ 残念ながら, それは楽観的すぎであるとわかる.

普通のアクシオンモデルでは, 動径成分もある.

$$\Phi(r) = \frac{f(r)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(r)} \quad \text{cf.) } f(r) = f_a \text{ in Giddings-Strominger.}$$

ワームホールの首付近で, $f(r)$ が大きな値をとるとわかる.

L. F. Abbott and M. B. Wise, Nucl. Phys. B **325**, 687 (1989).

➔ 作用の値が変更をうける.

KLLS analysis

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 52, NUMBER 2

15 JULY 1995

Gravity and global symmetries

Renata Kallosh,¹ Andrei Linde,¹ Dmitri Linde,² and Leonard Susskind¹

¹*Department of Physics, Stanford University, Stanford, California 94305-4060*

²*California Institute of Technology, Pasadena, California 91125*

(Received 17 February 1995)

There exists a widely held notion that gravitational effects can strongly violate global symmetries. If this is correct, it may lead to many important consequences. We argue, in particular, that nonperturbative gravitational effects in the axion theory lead to a strong violation of CP invariance unless they are suppressed by an extremely small factor $g \lesssim 10^{-82}$. One could hope that this problem disappears if one represents the global symmetry of a pseudoscalar axion field as a gauge symmetry of the Ogievetsky-Polubarinov-Kalb-Ramond antisymmetric tensor field. We show, however, that this gauge symmetry does not protect the axion mass from quantum corrections. The amplitude of gravitational effects violating global symmetries could be strongly suppressed by e^{-S} , where S is the action of a wormhole which may absorb the global charge. Unfortunately, in a wide variety of theories based on the Einstein theory of gravity the action appears to be fairly small, $S \sim 10$. However, we find that the existence of wormholes and the value of their action are extremely sensitive to the structure of space on the nearly Planckian scale. We consider several examples (Kaluza-Klein theory, conformal anomaly, R^2 terms) which show that modifications of the Einstein theory on the length scale $l \lesssim 10M_P^{-1}$ may strongly suppress violation of global symmetries. We find also that in string theory there exists an additional suppression of topology change by the factor $e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}}$. This effect is strong enough to save the axion theory for the natural values of the stringy gauge coupling constant.

動径方向成分の自由度がある場合、作用の値が ~ 10 程度と
小さくなるとわかった。

Quality problem!

KLLS setup

PQ 場

$$\Phi(r) = \frac{f(r)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(r)}$$

計量 (球対称)

$$ds^2 = dr^2 + a(r)^2 d^2\Omega_3$$

作用

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M^2}{2} R + |\partial_\mu \Phi|^2 + V(\Phi) \right] \quad V(\Phi) = \lambda \left(|\Phi|^2 - \frac{f_a^2}{2} \right)^2$$

経路積分の鞍点解は、次の作用を $J_\mu, f, g_{\mu\nu}$ に関して変分をとることによって得られる。


S. Coleman and K. Lee, Nucl. Phys. B **329**, 387 (1990).

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M_P^2}{2} R + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) + \frac{1}{2gf^2} g_{\mu\nu} J^\mu J^\nu + \frac{1}{\sqrt{g}} \theta \partial_\mu J^\mu \right]$$

Stationary solutions

- J_μ

$$J^\mu = \sqrt{g} g^{\mu\nu} f^2 \partial_\nu \theta \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{U(1)}_{\text{PQ}} \text{ 保存則}$$


$$2\pi^2 a^3(r) f^2(r) \theta'(r) = n$$

- f

$$f'' + 3\frac{a'}{a} f' = \frac{dV}{df} - \frac{n^2}{4\pi^4 f^3 a^6}$$

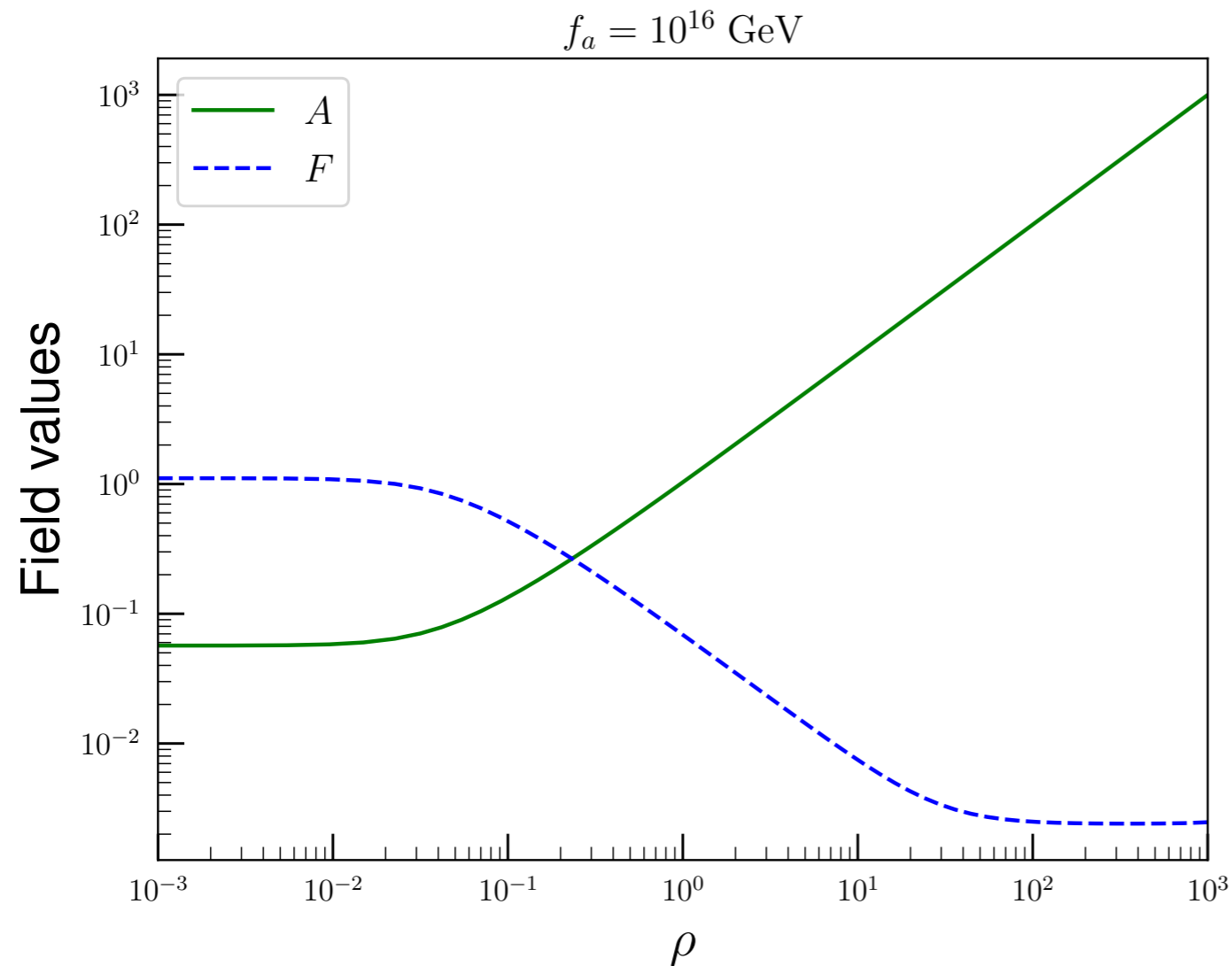
- $g_{\mu\nu}$

$$a'^2 - 1 = -\frac{a^2}{3M_P^2} \left[-\frac{1}{2} f'^2 + V(f) + \frac{n^2}{8\pi^4 f^2 a^6} \right]$$

$$2aa'' + a'^2 - 1 = -\frac{a^2}{M_P^2} \left[\frac{1}{2} f'^2 - \frac{n^2}{8\pi^4 f^2 a^6} + V(f) \right]$$

今回もまた、独立な条件式ではない。

Results



$$\rho \equiv \sqrt{3\lambda} M_P r$$

$$A \equiv \sqrt{3\lambda} M_P a$$

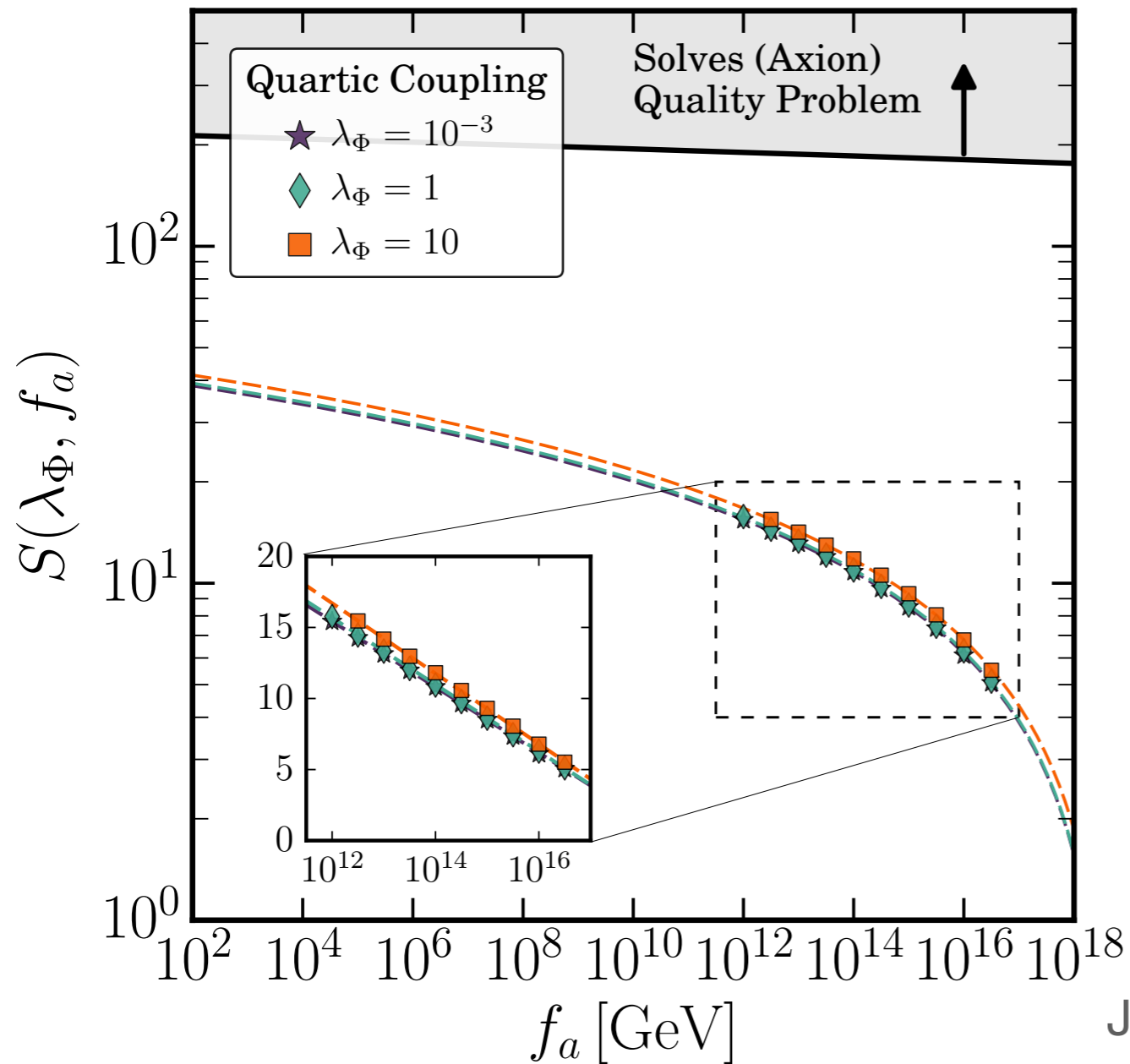
$$F \equiv \frac{f}{\sqrt{3} M_P}$$

境界条件

$$f'(0) = 0, \quad f(\infty) = f_a, \quad a'(0) = 0$$

$f(r)$ は, ワームホールの首付近で大きな値をとる.

Results



J. Alvey and M. Escudero, JHEP **01**, 032 (2021).

- 作用の値は ~ 200 よりも全然小さい。
- この場合、アクシオン・クォリティ問題が生じる。

Origin of the difference

作用の形

$$S = 2\pi^2 \int_0^\infty dr a^3(r) \left[\frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} f^2 \theta'^2 + \dots \right]$$
$$= 2\pi^2 \int_0^\infty dr a^3(r) \left[\frac{1}{2} f'^2 + \frac{n^2}{8\pi^4 a^6 f^2} + \dots \right]$$

f が固定されているとき，首付近で第二項が支配的.

$$\Delta S \simeq 2\pi^2 \cdot a_0^4 \cdot \frac{n^2}{8\pi^4 a_0^6 f_a^2} \sim \frac{nM_P}{f_a}$$

$f(r)$ が動的の場合，首付近で $\sim M_P$ の値をとることで，作用への寄与が $\mathcal{O}(1)$ にとどまる.

Summary

● Giddings-Strominger

▶ 動径方向が固定.

▶ $f_a \lesssim 10^{16}$ GeV でクォリティ問題を避けられる.

● Kallosh-Linde-Linde-Susskind

▶ 動径方向が動的.

▶ クォリティ問題あり.

重力との結合の仕方が最小でない場合はどうなるだろうか？

これを次に議論します.

Our work

K. Hamaguchi, Y. Kanazawa, N. Nagata, Phys. Rev. D**105**, 076008 (2022).

Model

PQ 場

$$\Phi(r) = \frac{f(r)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(r)}$$

計量 (球対称)

$$ds^2 = dr^2 + a(r)^2 d^2\Omega_3$$

作用

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M^2}{2} R - \xi |\Phi|^2 R + |\partial_\mu \Phi|^2 + V(\Phi) \right]$$

Non-minimal coupling

$$V(\Phi) = \lambda \left(|\Phi|^2 - \frac{f_a^2}{2} \right)^2$$

漸近平坦領域で,

$$|\langle \Phi \rangle| = \frac{f_a}{\sqrt{2}}$$

$$M_P^2 = M^2 + \xi f_a^2$$

$$M^2 \geq 0$$



$$\xi \leq \frac{M_P^2}{f_a^2}$$

Euclidean path integral

経路積分の鞍点解は、次の作用を $J_\mu, f, g_{\mu\nu}$ に関して変分をとることによって得られる。

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M_P^2}{2} \Omega^2(f) R + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) + \frac{1}{2gf^2} g_{\mu\nu} J^\mu J^\nu + \frac{1}{\sqrt{g}} \theta \partial_\mu J^\mu \right]$$

$$\Omega^2(f) \equiv 1 + \frac{\xi}{M_P^2} (f^2 - f_a^2)$$

● J_μ

$$J^\mu = \sqrt{g} g^{\mu\nu} f^2 \partial_\nu \theta \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

U(1)_{PQ} 保存則



$$2\pi^2 a^3(r) f^2(r) \theta'(r) = n$$

Stationary solutions

- f

$$f'' + 3\frac{a'}{a}f' = \frac{dV}{df} - \frac{n^2}{4\pi^4 f^3 a^6} + 6\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right]\xi f$$

- $g_{\mu\nu}$

$$\Omega^2(f)(a'^2 - 1) + \frac{2\xi}{M_P^2}aa'ff' = -\frac{a^2}{3M_P^2}\left[-\frac{1}{2}f'^2 + V(f) + \frac{n^2}{8\pi^4 f^2 a^6}\right]$$

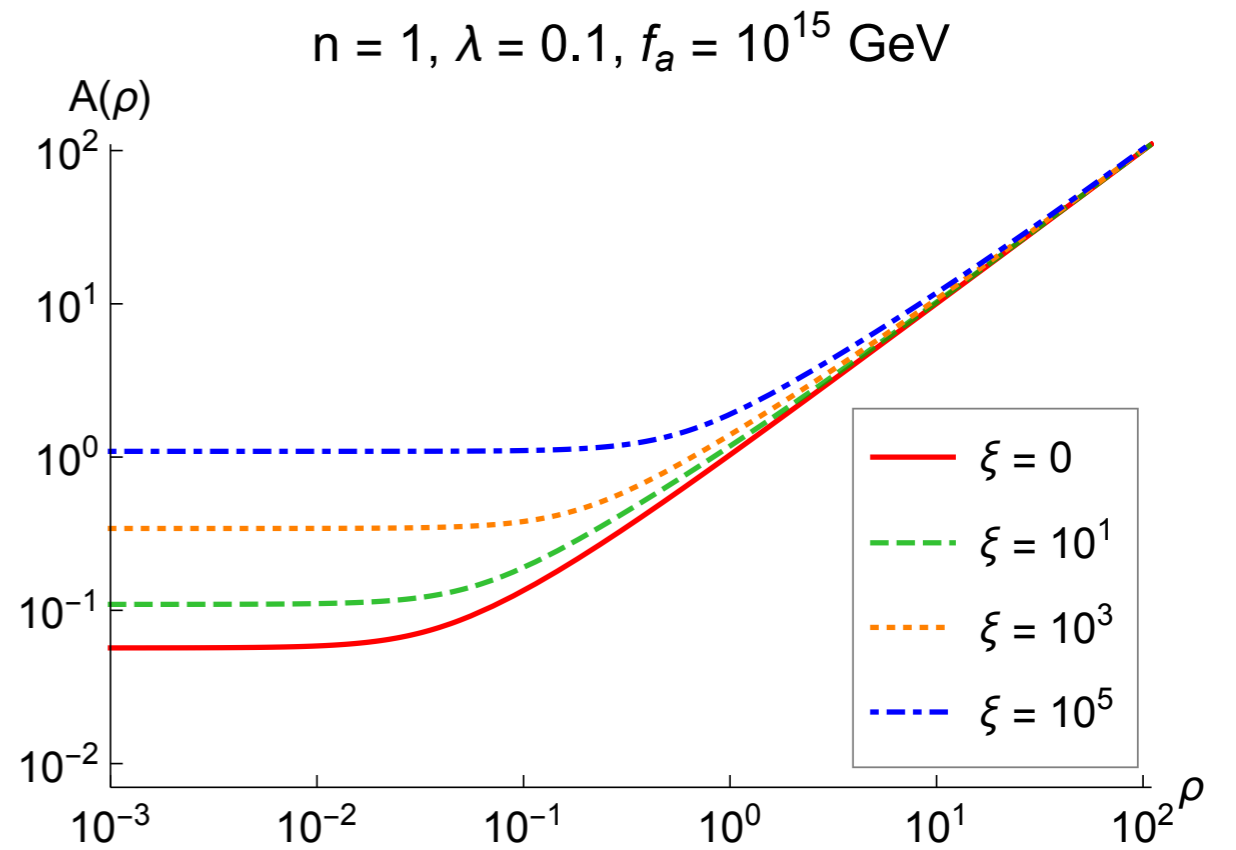
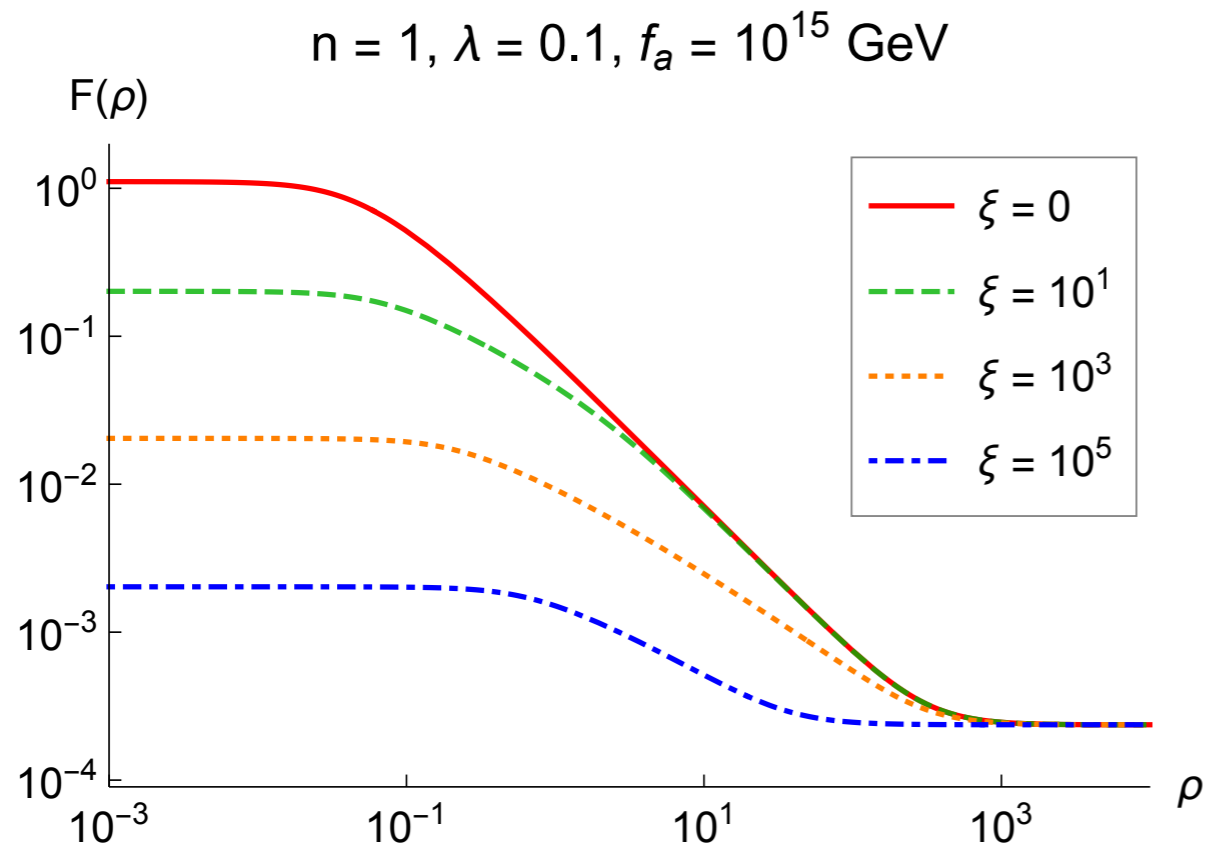
$$\Omega^2(f)(2aa'' + a'^2 - 1) + \frac{2\xi a^2}{M_P^2}\left[ff'' + f'^2 + 2\frac{a'}{a}ff'\right] = -\frac{a^2}{M_P^2}\left[\frac{1}{2}f'^2 - \frac{n^2}{8\pi^4 f^2 a^6} + V(f)\right]$$

境界条件

今回もまた、独立な条件式ではない。

$$f'(0) = 0, \quad f(\infty) = f_a, \quad a'(0) = 0$$

Results



$$\rho \equiv \sqrt{3\lambda} M_P r, \quad A \equiv \sqrt{3\lambda} M_P a, \quad F \equiv \frac{f}{\sqrt{3} M_P}$$

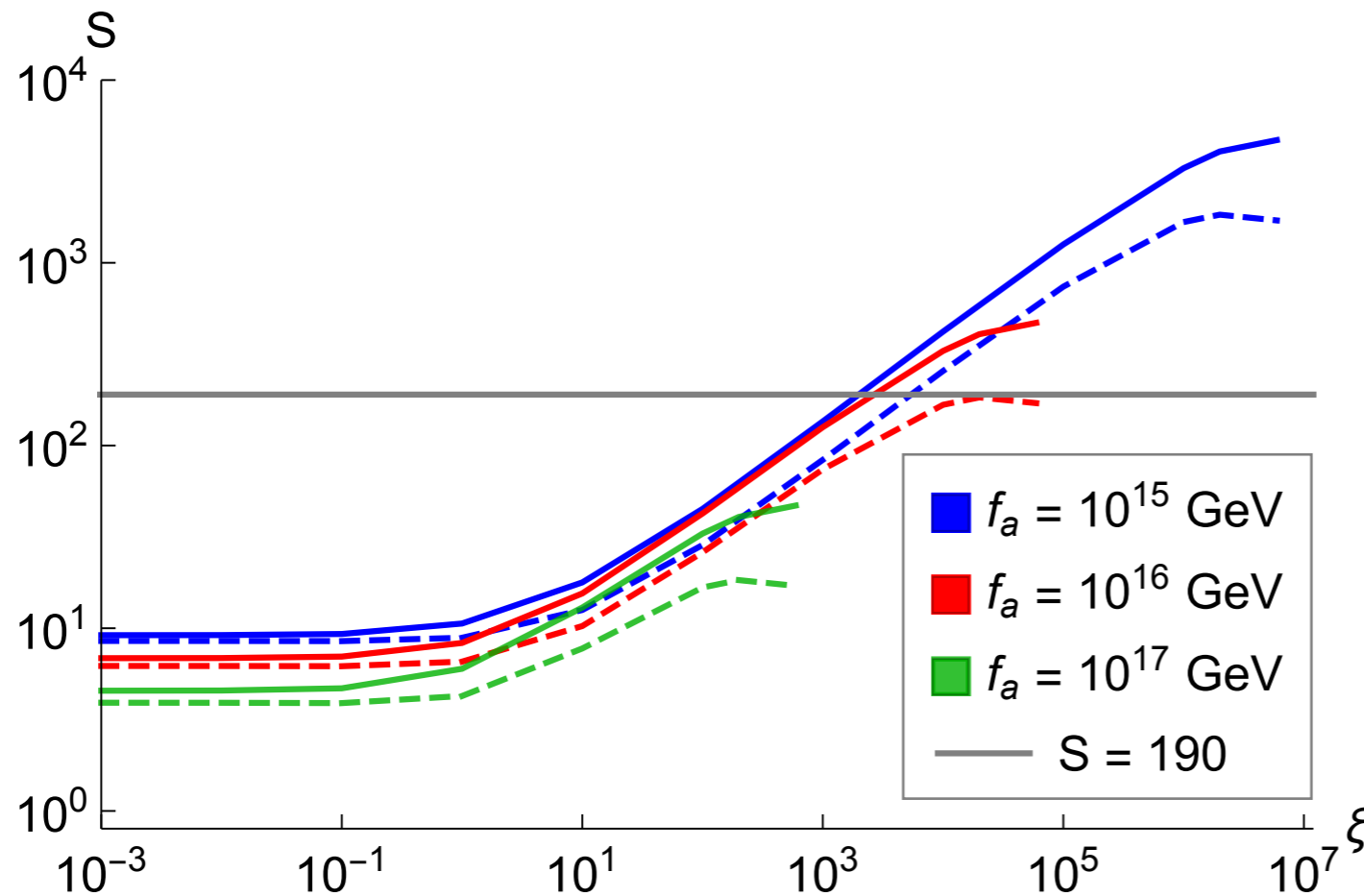
ξ を大きくすると, $\rho \simeq 0$ で

▶ $F(\rho)$ は減少

▶ $A(\rho)$ は増加

Action

$n = 1, \lambda = 0.1$

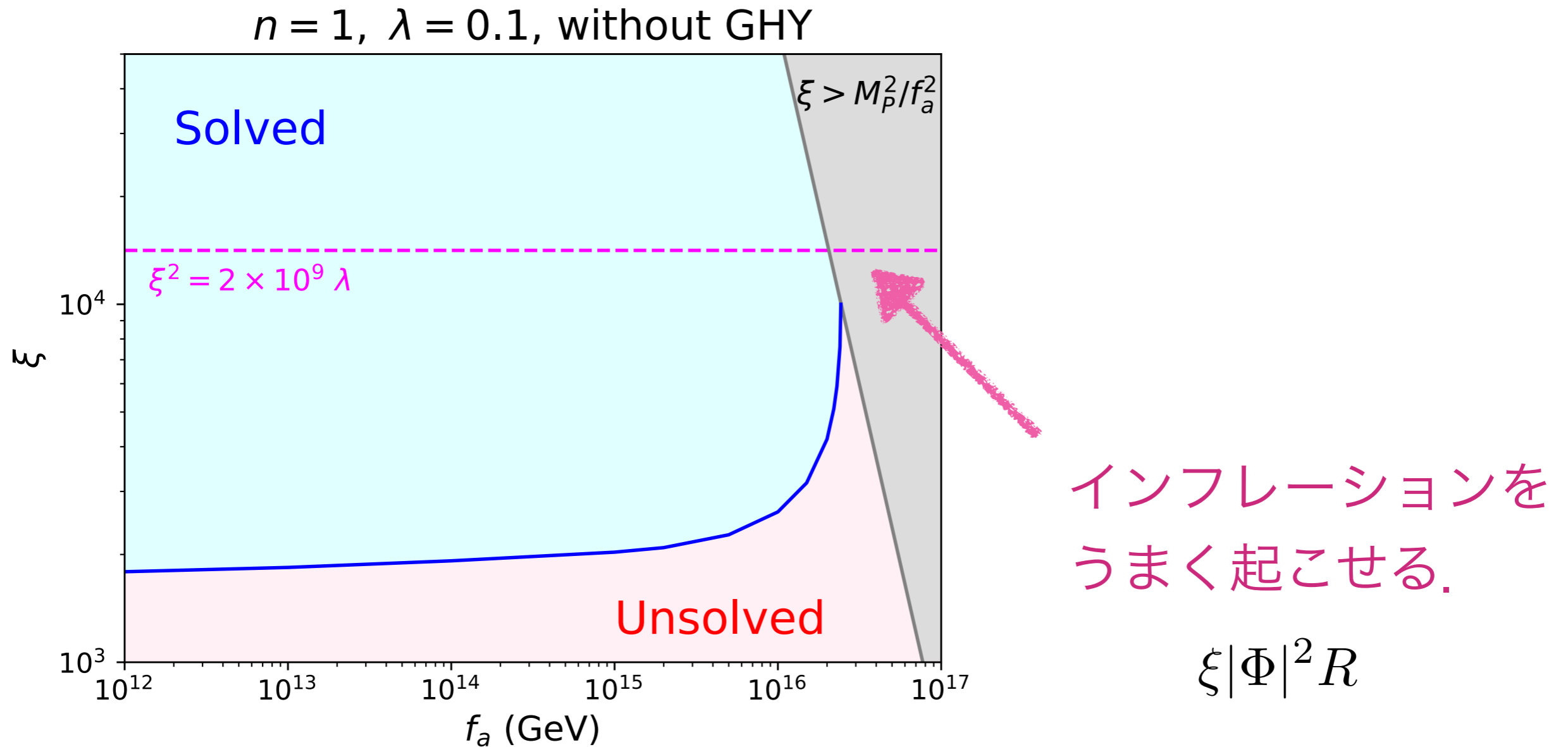


$\Delta a/f_a \lesssim 10^{-10}$

$\xi \leq M_P^2/f_a^2$

- ▶ ξ が増加するにつれ，作用の値も増加する。
- ▶ $\xi \gtrsim 2 \times 10^3$ でクォリティ問題を回避できる。

Results



- ▶ $f_a \lesssim 2.5 \times 10^{16}$ GeV でクォリティ問題を回避しうる.
- ▶ インフレーションも同時に考える.

Limits

- $\xi = M_P^2/f_a^2$ で, $f_a = \text{const.}$ が解となるとわかる.



Giddings-Strominger wormhole

クォリティ問題無し

- $\xi = 0$ の場合



KLLS wormhole

クォリティ問題あり

ξ によって, これら2つの場合がスムーズに接続されている.

Discussion

Summary

- ▶ ワームホールはアクシオン・クォリティ問題を引き起こす.
- ▶ **Non-minimal coupling**によって, ワームホールの寄与を十分抑制しうる.
- ▶ インフレーションと一石二鳥?
- ▶ アクシオン・クォリティ問題解決への新たな方向性

Palatini formalism

A. Einstein (1925)

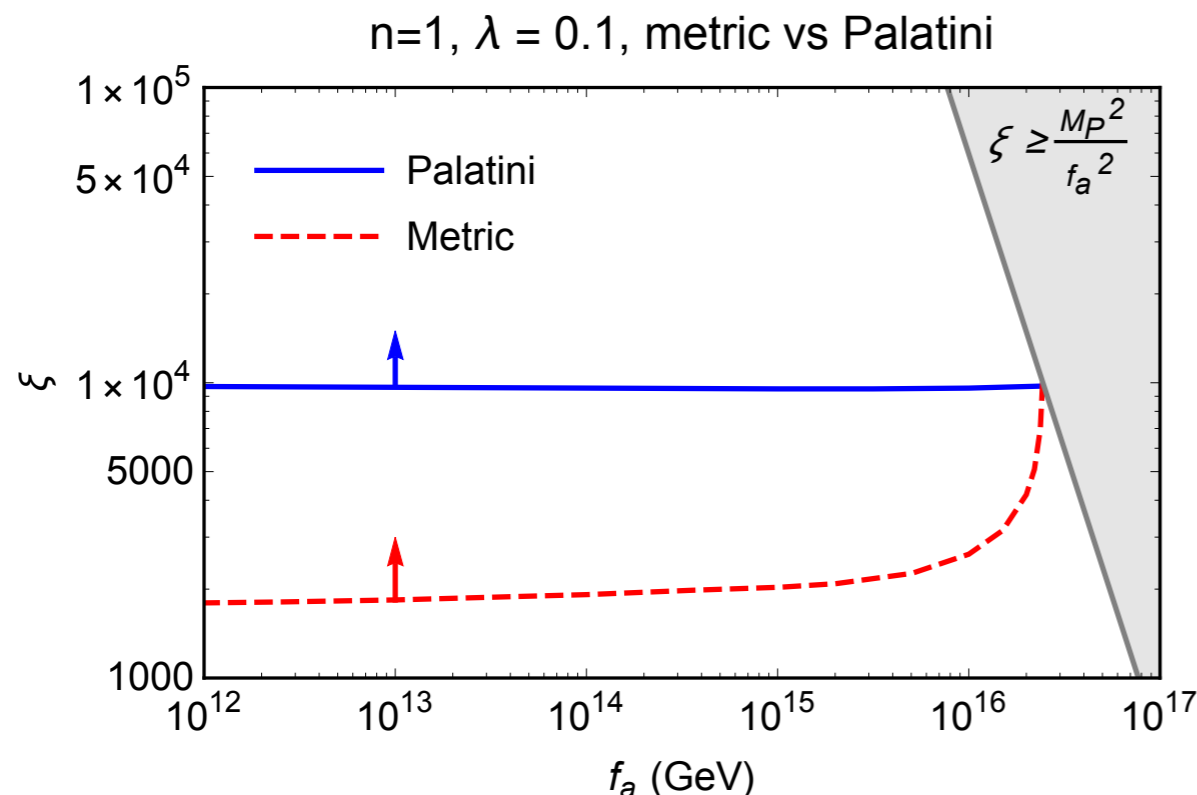
接続 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ を計量と独立な自由度とみなす形式.

● アインシュタイン重力

計量形式と同一の運動方程式を与える.

● Non-minimal coupling 有りの場合

一般に, 計量形式と異なる運動方程式を与える.



cf.) Inflation

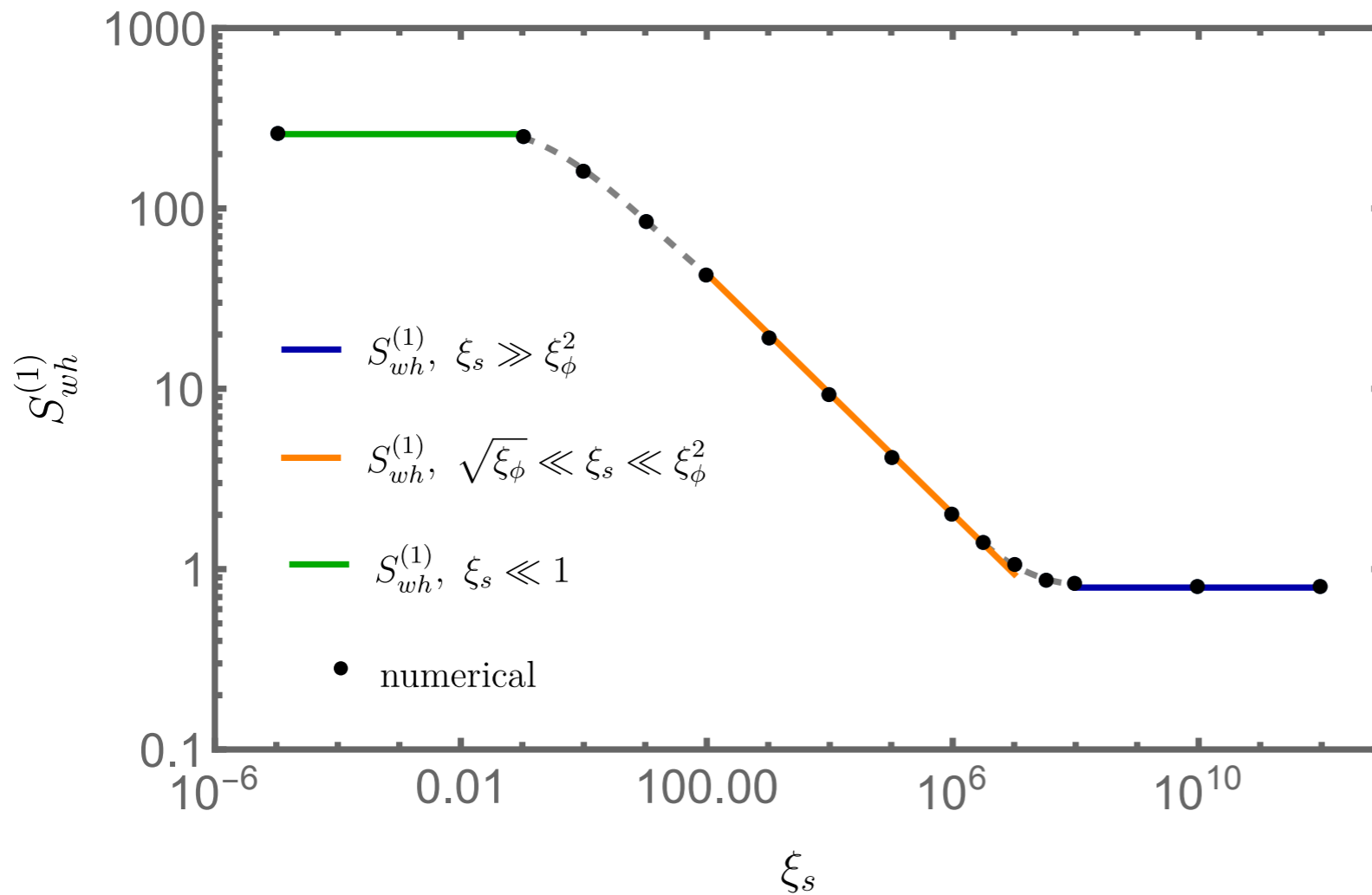
$$\xi \simeq 1.4 \times 10^{10} \lambda$$

R²

さらに R^2 項もある場合も、いくつかの極限において解析された。

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[- \left(\frac{M_P^2}{2} + \xi_\phi |\Phi|^2 \right) R + \frac{\xi_s}{4} R^2 + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - V(|\Phi|) \right]$$

$\xi_s - S_{wh}^{(1)}$ relation, $n = 1$, $\xi_\phi = 10^4$



$$\mu \frac{d\xi_s}{d\mu} = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\xi_\phi + \frac{1}{6} \right)^2$$

くりこみ群で生成.

悪い方に行く.

Backup

Peccei-Quinn mechanism

関連するラグランジアン項

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g_s^2}{32\pi^2} \left(\frac{a}{f_a} + \theta_G \right) G_{\mu\nu}^A \tilde{G}^{A\mu\nu} - \sum_q \left[m_q e^{i\theta_q} \bar{q}_R q_L + \text{h.c.} \right]$$

カイラル変換 $q \rightarrow e^{-i\gamma_5 \alpha_q / 2} q$ によって第一項が

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{g_s^2}{32\pi^2} \left(\sum_q \alpha_q \right) G_{\mu\nu}^A \tilde{G}^{A\mu\nu} \quad \text{だけ変化する.}$$

よって,

$$\sum_q \alpha_q = \frac{a}{f_a} + \theta_G$$

$$\sum_q \left[m_q e^{i(\theta_q + \alpha_q)} \bar{q}_R q_L + \text{h.c.} \right]$$

とすることで、第一項を第二項へとうつせる。

Chiral Lagrangian

中間子の相互作用を記述する低エネルギー有効相互作用は、
微分展開の最低次で

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$$

(f_π : パイオン崩壊定数)

ただし、

$$U \equiv e^{\frac{2i\pi^a(x)T^a}{f_\pi}}$$

(T^a : $SU(N_f)$ 生成子)

$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 変換のもとで、この場合は

$$U \rightarrow g_R U g_L^{-1}$$

$$g_L \in SU(N_f)_L \quad g_R \in SU(N_f)_R$$

のように変換する。

Mass term

質量項の効果も、次のようにしてカイラルラグランジアンに取り入れられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &= - \sum_q \left[m_q e^{i(\theta_q + \alpha_q)} \bar{q}_R q_L + \text{h.c.} \right] \quad (N_f = 2) \\ &= - (\underbrace{\bar{u}_R, \bar{d}_R}_{\bar{q}_R}) \underbrace{\begin{pmatrix} m_u e^{i(\theta_u + \alpha_u)} & 0 \\ 0 & m_d e^{i(\theta_d + \alpha_d)} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}}_{q_L} + \text{h.c.}\end{aligned}$$

変換則

$$q_L \rightarrow g_L q_L \quad q_R \rightarrow g_R q_R$$

\mathcal{M} が $\mathcal{M} \rightarrow g_R \mathcal{M} g_L^{-1}$ と変換するなら上の項は不変。

Mass term

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ 不変な形で \mathcal{M} を組み入れる.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{f_\pi^2 B_0}{2} \text{Tr} (U \mathcal{M}^\dagger + \mathcal{M} U^\dagger)$$

(B_0 : 定数)

成分表示

$$U \equiv e^{\frac{2i\pi^a(x)T^a}{f_\pi}} \quad 2\pi^a T^a = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

以下では, アクシオン・ポテンシャルに関する中性成分に焦点をあてる.

Mass term

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &= f_\pi^2 B_0 \text{Re} \left[e^{i\frac{\pi^0}{f_\pi}} \left\{ m_u e^{-i(\theta_u + \alpha_u)} + m_d e^{i(\theta_d + \alpha_d)} \right\} \right] \\ &= f_\pi^2 B_0 (m_u + m_d) \left[1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{f_a} + \bar{\theta} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\pi^0}{f_\pi} - \phi \right)\end{aligned}$$

ただし

$$\bar{\theta} = \theta_G + \sum_q \theta_q \quad \tan \phi \equiv \frac{m_u \sin(\theta_u + \alpha_u) - m_d \sin(\theta_d + \alpha_d)}{m_u \cos(\theta_u + \alpha_u) + m_d \cos(\theta_d + \alpha_d)}$$

係数はパイオン質量と関係づく。

$$m_\pi^2 = B_0 (m_u + m_d)$$

パイオン場の真空期待値： $\langle \pi^0 \rangle = f_\pi \phi$

Axion potential

パイオン場を積分して，アクシオン・ポテンシャルを得る．

$$V(a) = -f_\pi^2 m_\pi^2 \left[1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{f_a} + \bar{\theta} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ポテンシャルの最小点で

$$\frac{\langle a \rangle}{f_a} + \bar{\theta} = 0$$

アクシオン質量

$$m_a^2 = \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{f_a^2}$$

$$m_a \simeq 6 \text{ meV} \times \left(\frac{10^9 \text{ GeV}}{f_a} \right)$$

Folk theorem

大域的な対称性のもとで電荷を持つ粒子が、ブラックホールに飲み込まれたと仮定する。

ブラックホールは最終的にホーキング放射により蒸発する。



大域的対称性の電荷は破壊される。

重力による破れ

Cf.) ゲージ電荷

ガウスの法則により、電束が保存される。

荷電ブラックホールは完全に蒸発できない。

Two-form gauge theory

Giddings-Strominger の原論文では、2-形式ゲージ理論が考えられていた。

$b_{\mu\nu}$: Kalb-Ramond 場

場の強さ

$$H = db \quad H_{\mu\nu\rho} = \nabla_{\mu}b_{\nu\rho} + \nabla_{\nu}b_{\rho\mu} + \nabla_{\rho}b_{\mu\nu}$$

ゲージ変換

$$\delta b = d\Lambda \quad \delta b_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\Lambda_{\mu}$$

H はアキシオン場 θ と双対関係にある:

$$H_{\mu\nu\rho} = f_a^2 \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial^{\lambda} \theta$$

Two-form gauge theory

作用

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left(-\frac{M_P^2}{2} R + \frac{1}{12f_a^2} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right)$$

球対称解を探す:

$$ds^2 = dr^2 + a(r)^2 d^2\Omega_3$$

$d^2\Omega_3$: 3次元空間要素

$$H_{\mu\nu\rho} = \mathcal{H}(r)\epsilon_{ijk}$$

r : ユークリッド時間

鞍点解

- $g_{\mu\nu}$

$$3 \left[\frac{a'^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right] = -\frac{1}{2f_a^2 M_P^2} \mathcal{H}^2$$

$$2aa'' + a'^2 - 1 = \frac{1}{2f_a^2 M_P^2} \mathcal{H}^2 a^2$$

Two-form gauge theory

鞍点解

- $H_{\mu\nu\rho}$

$$\partial_\mu(\sqrt{g}H^{\mu\nu\rho}) = 0 \quad \text{常に満たされる.}$$

- ビアンキ恒等式

$$dH = 0 \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu H_{\nu\rho\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\sqrt{|\tilde{g}|} a^3(r) \mathcal{H}(r) \varepsilon_{ijk} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(r) = \frac{\mathcal{H}_0}{a^3(r)}$$

\mathcal{H}_0 を, $r \rightarrow \infty$ で次のように規格化する.

$$\int d\Omega_3 r^3 \mathcal{H}(r) = \int d\Omega_3 \mathcal{H}_0 = 2\pi^2 \mathcal{H}_0 = n$$

Giddings-Strominger wormhole

Giddings-Stromingerワームホール解は、楕円積分を用いて解析的に表すことができる。

$$r = a \sqrt{1 - \frac{a_0^4}{a^4}} + \frac{a_0}{\sqrt{2}} F \left(\cos^{-1} \left\{ \frac{a_0}{a} \right\} \middle| \frac{1}{2} \right) - \sqrt{2} a_0 E \left(\cos^{-1} \left\{ \frac{a_0}{a} \right\} \middle| \frac{1}{2} \right)$$

S. B. Giddings and A. Strominger, Nucl. Phys. B **306**, 890 (1988).

楕円積分

$$F(\phi|m) = \int_0^\phi (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta ,$$

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta .$$

Charge quantization

$$n = \int d\Omega_3 J^0 = 2\pi^2 a^3(r) f_a^2 \theta'(r) \quad \text{は整数であるとわかる.}$$

これを見るために、作用のアクション部分をローレンツ時空で考察する.

$$e^{iS_\theta}$$

$$S_\theta = \int d^4x \sqrt{g} \frac{f_a^2}{2} \dot{\theta}^2 = \int dt \int d\Omega_3 \sqrt{g_3} \frac{f_a^2}{2} \dot{\theta}^2$$

場の変位 $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ に対し,

$$\delta S_\theta = f_a^2 \int dt \int d\Omega_3 \sqrt{g_3} \dot{\theta} \delta\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{g_3} \dot{\theta}) = 0 \quad \text{に注意}$$

$$\rightarrow \delta S_\theta = f_a^2 \left[\int d\Omega_3 \sqrt{g_3} \dot{\theta} \delta\theta \right]_{\text{boundary}} = n [\delta\theta]_{\text{boundary}}$$

今、 $\theta \rightarrow \theta + 2\pi k$ はゲージ冗長性であるから、 $n \in \mathbb{Z}$.

Gibbons-Hawking-York term

境界がある場合，変分原理をwell-definedにするために境界項を足さなければならない。 (ラグランジアンが2階微分を含むため)

$$S_{\text{GHY}} = -M_P^2 \int_{\partial V} d^3x \sqrt{|\tilde{g}|} K$$

ここで，

$$K \equiv g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = P^{\alpha\beta} \nabla_\alpha n_\beta$$

- $K_{\mu\nu}$: the extrinsic curvature
- $P_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$: 射影テンソル
- n^μ : 超曲面の法線単位ベクトル

この項は，Gibbons-Hawking-York (GHY) 項と呼ばれる。

Gibbons-Hawking-York term

今の場合,

$$K = P^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} = g^{ij} \nabla_i n_j = g^{ij} (-\Gamma_{ij}^0) = aa' g^{ij} \frac{g_{ij}}{a^2} = 3 \frac{a'}{a}$$

従って,

$$S_{\text{GHY}} = -3M_P^2 \int_{\partial V} d\Omega_3 a^2 a'$$

この積分は発散している. この問題に対する標準的な対処法は,

$$K \rightarrow K - K_0$$

K_0 : フラットな時空に同一の境界が埋め込まれた場合の extrinsic curvature.

$$K_0 = \frac{3}{a}$$

Caveat

アクシオン・ワームホールの鞍点解を探す際に、PQ電荷保存則にまつわる微妙な点がある。

K. Lee, Phys. Rev. Lett. **61**, 263 (1988).

問題の起源

S. Coleman and K. Lee, Nucl. Phys. B **329**, 387 (1990).

ある値の電荷Qについて、最低エネルギーを計算することを考える。

$$\langle f | e^{-HT/\hbar} | i \rangle = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle f | n \rangle \langle n | i \rangle$$

これは励起状態に対応するため、鞍点法を直接用いることはできない。

代わりに次の量を計算する。

$$\langle f | e^{-HT/\hbar} \delta(Q - q) | i \rangle = \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \delta(Q_n - q) \langle f | n \rangle \langle n | i \rangle$$

Caveat

今の場合, 2つの方法でこの問題を回避しうる事が次の論文で議論された.

S. Coleman and K. Lee, Nucl. Phys. B **329**, 387 (1990).

● 次の作用

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{M_P^2}{2} R + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) + \frac{1}{2gf^2} g_{\mu\nu} J^\mu J^\nu + \frac{1}{\sqrt{g}} \theta \partial_\mu J^\mu \right]$$

を, $J_\mu, f, g_{\mu\nu}$ について変分をとる方法.

▶ 位相空間の経路積分から出発してこれを得ることができる.

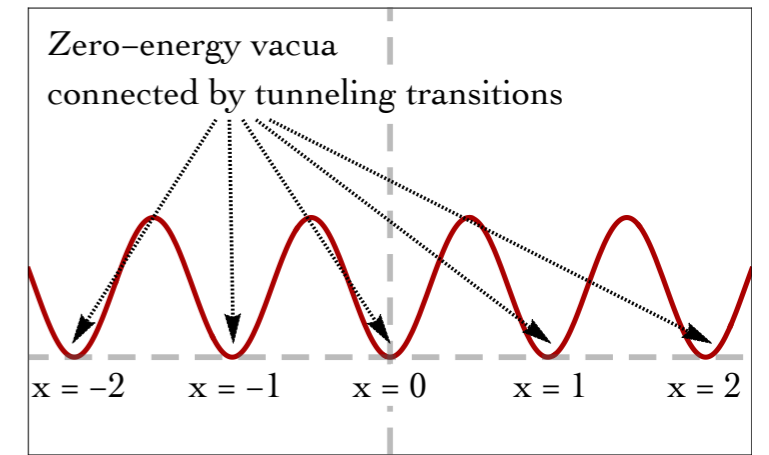
▶ 電荷保存則は, ラグランジュ未定定数法で取り入れられる.

● 虚数の θ について鞍点を探す方法.

$$\phi = i\theta$$

1-D periodic potential

希薄気体近似のもとで,



Taken from R. Alonso, A. Urbano, JHEP **02**, 136 (2019).

$$\langle k | e^{-HT} | j \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega T/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n! \bar{n}!} (K e^{-S_0 T})^{n+\bar{n}} \delta_{n-\bar{n}, k-j}$$

$$\omega^2 = V'''(0) \quad K \equiv \sqrt{\frac{S_0}{2\pi}} \left| \frac{\det(-\partial_t^2 + \omega^2)}{\det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))} \right|^{1/2}$$

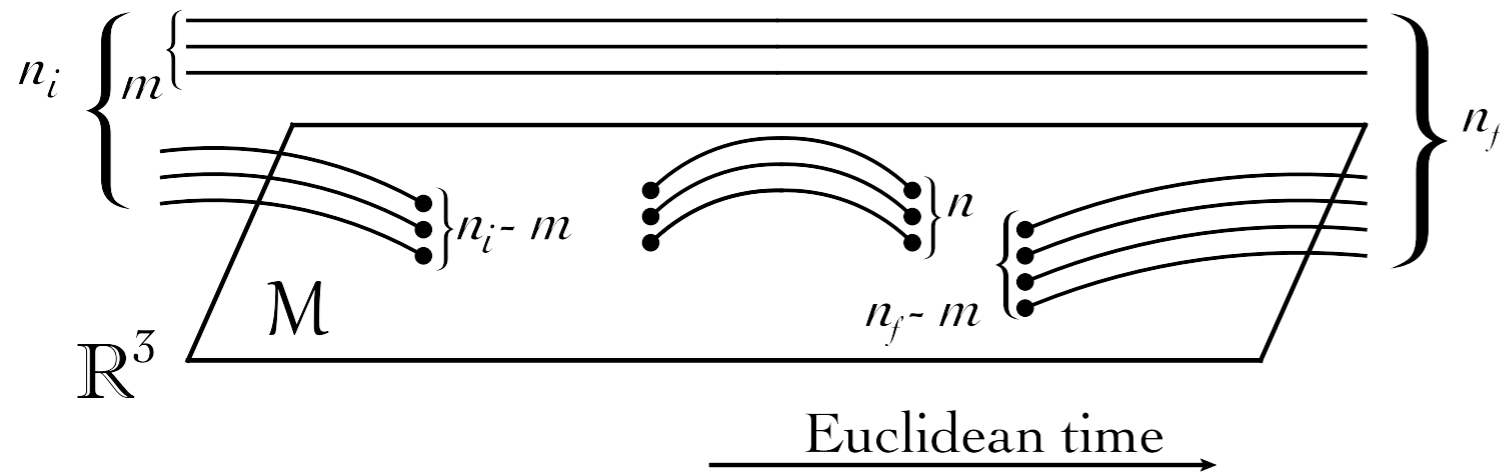
これは, 次のように求まる:

$$\langle k | e^{-HT} | j \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(j-k)} \exp(2KT e^{-S_0} \cos \theta)$$

エネルギー固有状態

$$|\theta\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-i\theta n} |n\rangle \quad E(\theta) = \frac{\omega}{2} - 2K e^{-S_0} \cos \theta$$

Multiple wormholes



Taken from R. Alonso, A. Urbano, JHEP **02**, 136 (2019).

$n_i \rightarrow n_f$ インスタントン状態遷移振幅は次式で与えられる.

S. B. Giddings and A. Strominger, Nucl. Phys. B **307**, 854 (1988).

$$\langle n_f | e^{-HT} | n_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\min(n_i, n_f)} \frac{\sqrt{n_i! n_f!}}{m!} \frac{(KVT e^{-S})^{2n+n_i+n_f-2m}}{2^n n! (n_i - m)! (n_f - m)!}$$

同じ結果が、次のハミルトニアンを用いても得られる：

$$H = K e^{-S} V(a + a^\dagger)$$

a : インスタントン消滅演算子

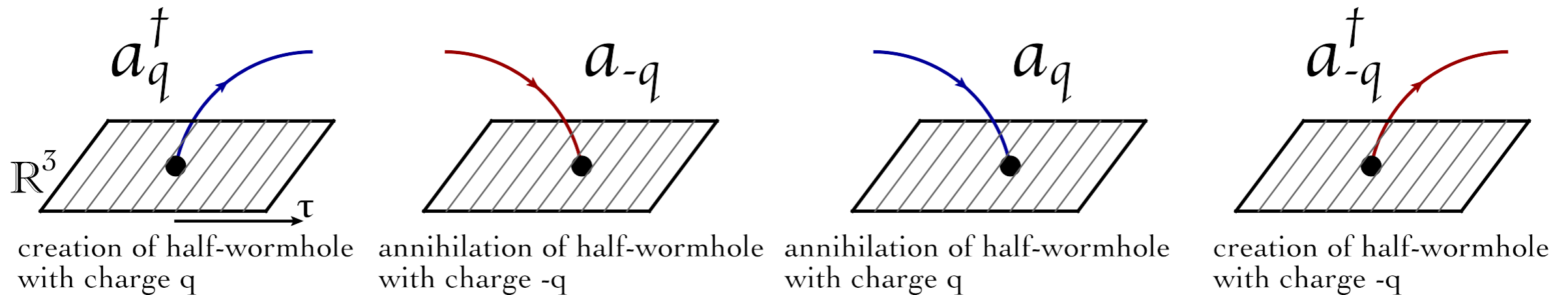
Effective wormhole action

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \sum_q K_q e^{-S} \left[(a_q^\dagger + a_{-q}) \mathcal{O}_{-q} + (a_{-q}^\dagger + a_q) \mathcal{O}_q(x) \right]$$

S. J. Rey, Phys. Rev. D **39**, 3185 (1989).

$\mathcal{O}_q(x)$: 電荷 q を持つ演算子

$$\mathcal{O}_q(x) \rightarrow e^{iq\alpha} \mathcal{O}_q(x) \quad \theta \rightarrow \theta + \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_q(x) = e^{iq\theta} \mathcal{O}_S(x)$$



Equivalent configurations as they describe the same tunneling process $\Delta Q = -q$

Equivalent configurations as they describe the same tunneling process $\Delta Q = +q$

Effective potential

S. J. Rey, Phys. Rev. D **39**, 3185 (1989).

次の演算子を定義する.

$$C_q \equiv a_q^\dagger + a_{-q} \quad C_q^\dagger \equiv a_{-q}^\dagger + a_q$$

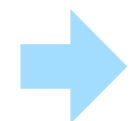
$$[C_q, C_{q'}] = [C_q^\dagger, C_{q'}^\dagger] = [C_q, C_{q'}^\dagger] = 0$$

また, 対応するコヒーレント状態も定義

cf.) $\mathcal{T}|\theta\rangle = e^{i\theta}|\theta\rangle$

$$C_q|\alpha\rangle = \alpha_q e^{i\delta_q}|\alpha\rangle \quad C_q^\dagger|\alpha\rangle = \alpha_q e^{-i\delta_q}|\alpha\rangle$$

トンネル遷移により, コヒーレント状態がエネルギー固有状態となる.



$$S = \int d^4x \sqrt{g} \sum_q 2K_q e^{-S} \alpha_q \mathcal{O}_S \cos(q\theta + \delta_q)$$