Gradient flow exact renormalization group

Hiroshi Suzuki (Kyushu Univerusty)

2023 年 2 月 20 日
Kagoshima Workshop on Particles, Fields and Strings 2023

- 園田英徳（神戸大学）-鈴木:
  PTEP **2019**, no.3, 033B05 (2019) [arXiv:1901.05169 [hep-th]]
  PTEP **2021**, no.2, 023B05 (2021) [arXiv:2012.03568 [hep-th]]
  PTEP **2022**, no.5, 053B01 (2022) [arXiv:2201.04448 [hep-th]]
- 宮川侑樹（九州大学）-鈴木:
  PTEP **2021**, no.8, 083B04 (2021) [arXiv:2106.11142 [hep-th]]
- 宮川-園田-鈴木:
  PTEP **2022**, no.2, 023B02 (2022) [arXiv:2111.15529 [hep-th]]
  and work in progress

K. Wilson の厳密くりこみ群 (ERG)

- スケール変換のもとでの有効相互作用の変化：

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{S_\tau} \sim e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau,\tau_0)^n \langle \phi(e^{\tau-\tau_0}x_1)\cdots\phi(e^{\tau-\tau_0}x_n)\rangle_{S_{\tau_0}}$$

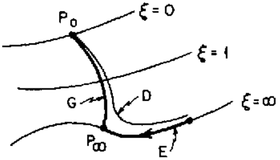

Fig. 12.6. Renormalization group trajector

- 連続時空の場の量子論を構成する一般的描像：相関距離 $\xi = \xi_0|K-K_c|^{1/y_E}$:

$$\langle \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\rangle_g$$

$$\equiv \lim_{\tau_0\to-\infty} e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau,\tau_0)^n \langle \phi(e^{\tau-\tau_0}x_1)\cdots\phi(e^{\tau-\tau_0}x_n)\rangle_{S_{\tau_0},K=K_c-ge^{-y_E(\tau-\tau_0)}}$$

- 非摂動的な固定点まわりの理論の素粒子物理への応用？
- 多フレーバー非可換ゲージ理論 (Banks–Zaks fixed point)；テクニカラーシナリオ？
- 漸近的安全（くりこみ可能）重力？
- こうした素粒子論で興味ある理論では、ゲージ対称性が基本的

ERG の具体形：スカラー場理論での Polchinski 方程式

- なめらかな運動量カットオフ、例えば
$$K(p/\Lambda) = e^{-p^2/\Lambda^2}$$
を導入
- 汎関数積分の運動量が UV カットオフ Λ 以上のモードを "integrate out" して、Wilson 作用 $S_\Lambda[\phi]$ を得る
- $S_\Lambda[\phi]$ を Λ で微分し、UV カットオフ Λ の変化に対する応答を見る
- Λ を単位として全てを無次元化し、スケール変換に対する応答に直す
（$\Lambda = 1$ と置くことに対応：格子模型！）
- Polchinski 方程式（$\tau \sim -\ln\Lambda$）：
$$\frac{\partial}{\partial\tau} e^{S_\tau[\phi]} = \int d^D x \left(-2\partial^2 - \frac{D-2}{2} - \gamma_\tau - x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x)\cdot\frac{\delta}{\delta\phi(x)} e^{S_\tau[\phi]}$$
$$+ \int d^D x \,(-2\partial^2 + 1 - \gamma_\tau)\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta\phi(x)} e^{S_\tau[\phi]}$$
（ここでは $K(p)[1-K(p)] \to p^2$ と一般化し、異常次元 $\gamma_\tau \equiv \partial_\tau \ln Z(\tau, \tau_0)$ も導入した）
- スカラー場理論での非摂動的固定点の探索などでは非常にうまく働く

ERG で有用な概念（きれいなスケーリングに従う object）

- 変形された相関関数 (Sonoda, 2015)

$$\langle\!\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle\!\rangle_{S_\tau} \equiv \int [d\phi]\, e^{S_\tau[\phi]}\hat{s}^{-1}\left[e^{-\partial^2}\phi(x_1)\cdots e^{-\partial^2}\phi(x_n)\right]$$

ここで、$\hat{s}$ は “scrambler”

$$\hat{s} \equiv \exp\left[+\frac{1}{2}\int d^D x\, \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(x)}\right]$$

これは、ERG のもとできれいなスケーリング則を示す：

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle\!\rangle_{S_\tau}\\ &= e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau,\tau_0)^n \langle\!\langle \phi(e^{-(\tau-\tau_0)}x_1)\cdots\phi(e^{-(\tau-\tau_0)}x_n)\rangle\!\rangle_{S_{\tau_0}}\end{aligned}$$

- “複合演算子” (Wilson, Wegner, Becchi, . . .)（$-y_\tau$：スケーリング次元）

$$\begin{aligned}&\int [d\phi]\, e^{S_\tau[\phi]}\mathcal{O}_\tau(x)\hat{s}^{-1}\left[e^{-\partial^2}\phi(x_1)\cdots e^{-\partial^2}\phi(x_n)\right]\\ &= e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\, y_{\tau'}} Z(\tau,\tau_0)^n\\ &\quad\times \int [d\phi]\, e^{S_{\tau_0}[\phi]}\mathcal{O}_{\tau_0}(e^{\tau-\tau_0}x)\hat{s}^{-1}\left[e^{-\partial^2}\phi(x_1)\cdots e^{-\partial^2}\phi(x_n)\right]_{x_i\to e^{\tau-\tau_0}x_i}\end{aligned}$$

複合演算子（きれいなスケーリングに従う object）

- 定義から、複合演算子は

$$\left(\partial_\tau - x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + y_\tau - \mathcal{D}_\tau\right)\mathcal{O}_\tau(x) = 0$$

という線形方程式、ここで

$$\mathcal{D}_\tau\mathcal{O}_\tau(x)$$
$$\equiv -e^{-S_\tau}\left[\hat{s}\int d^Dx\,\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(2\partial^2 + \frac{D-2}{2} + \gamma_\tau + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x)\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}, \mathcal{O}_\tau(x)\right]$$

に従う

- 複合演算子は、Wilson 作用の微小変形と見なせる：

$$S_\tau[\phi] \to S_\tau[\phi] + e^{\int^\tau d\tau'\, y_{\tau'}}\int d^Dx\,\epsilon(x)\mathcal{O}_\tau(e^{-\tau}x)$$

ゲージ理論における ERG

- 局所ゲージ変換

$$A^a_\mu(k) \to A^a_\mu(k) + ik_\mu \chi^a(k) - g\int_q f^{abc}\chi^b(q)A^c_\mu(k-q)$$

$$\psi(p) \to \psi(p) - g\int_q \chi^a(q)T^a\psi(p-q)$$

  は異なった運動量モードを混ぜるため、通常の ERG は明白なゲージ対称性を保たない

- おそらくこれが、ERG が素粒子論であまり使われない理由. . .
- ERG には変形されたゲージ対称性が存在する (Becchi, Ellwanger, Bonini-D'Attanasio-Marchesini, Reuter-Wetterich, Higashi-Itou-Kugo, Igarashi-Itoh-Sonoda) が、具体形は Wilson 作用 S_τ 自身に依存している
- 通常の ERG のゲージ不変な、特に非摂動論的な近似は極めて難しい（不可能？）
- 非自明固定点での臨界指数がゲージに依存、など
- 明白なゲージ対称性を保つ ERG は作れないか？

スカラー場の Wilson 作用の場の拡散による表示

- スカラー場理論 Wilson 作用の “積分表示”

$$e^{S_\tau[\phi]}$$
$$= \hat{s} \int [d\phi'] \prod_x \delta \left(\phi(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \, [(D-2)/2+\gamma_{\tau'}]} \phi'(t - t_0, e^{\tau-\tau_0} x) \right) (\hat{s}')^{-1} e^{S_{\tau_0}[\phi']}$$

ここで、$\phi'(t, x)$ は拡散方程式

$$\partial_t \phi'(t, x) = \partial^2 \phi'(t, x)$$

の解。拡散時間 t とスケールパラメター τ は

$$t - t_0 = e^{2(\tau-\tau_0)} - 1$$

で結びついている。拡散の初期値は積分変数 ϕ'：

$$\phi'(0, x) = \phi'(x)$$

- ERG と拡散方程式：Abe-Fukuma, Carosso-Hasenfratz-Neil, Matsumoto-Tanaka-Tsuchiya

これをゲージ共変な拡散方程式で置き換えたらどうだろう...

- グラディエントフロー方程式 (Narayanan-Neuberger, Lüscher)：

$$\partial_t A'^a_\mu(t,x) = D'_\nu F'^a_{\nu\mu}(t,x) = \partial^2 A'^a_\mu(t,x) + \text{非線形項} \qquad A'^a_\mu(0,x) = A'^a_\mu(x)$$

- フェルミオンの拡散方程式 (Lüscher)：

$$\partial_t \psi'(t,x) = D'_\mu D'_\mu \psi'(t,x) \qquad \psi'(0,x) = \psi'(x)$$

$$\partial_t \bar\psi'(t,x) = \bar\psi'(t,x) \overleftarrow{D}'_\mu \overleftarrow{D}'_\mu \qquad \bar\psi'(0,x) = \bar\psi'(x)$$

- Wilson 作用は、スカラー場を真似して

$$e^{S_\tau[A,\psi,\bar\psi]}$$

$$= \hat{s} \int [dA' d\psi' d\bar\psi']$$

$$\times \prod_{x,\mu,a} \delta\left(A^a_\mu(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \, [(D-2)/2+\gamma_{\tau'}]} A'^a_\mu(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x)\right)$$

$$\times \prod_{x} \delta\left(\psi(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \, [(D-1)/2+\gamma_{F\tau'}]} \psi'(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x)\right)$$

$$\times \prod_{x} \delta\left(\bar\psi(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \, [(D-1)/2+\gamma_{F\tau'}]} \bar\psi'(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x)\right) (\hat{s}')^{-1} e^{S_{\tau_0}[A',\psi',\bar\psi']}$$

$$\hat{s} \equiv \exp\left[+\frac{1}{2}\int d^D x \, \frac{\delta^2}{\delta A^a_\mu(x) \delta A^a_\mu(x)}\right] \exp\left[-i \int d^D x \, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar\psi(x)}\right]$$

グラディエントフロー厳密くりこみ群 (GFERG) と呼んでいます

- 実際には、ゲージモードも拡散するように

$$\partial_t A'^a_\mu(t,x) = D'_\nu F'^a_{\nu\mu}(t,x) + \alpha_0 D'_\mu \partial_\nu A'^a_\nu(t,x)$$

  などとする

- くりこみ群発展のもとで、明白なゲージ対称性が保存される：S_{τ_0} が

$$\begin{aligned}
A^a_\mu(x) &\to A^a_\mu(x) + \partial_\mu \chi^a(x) + g_\tau f^{abc} A^b_\mu(x)\chi^c(x) \\
\psi(x) &\to \psi(x) - g_\tau \chi^a(x) T^a \psi(x) \\
\bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x) + g_\tau \chi^a(x) \bar{\psi}(x) T^a
\end{aligned}$$

  の $\tau = \tau_0$ のもとで不変ならば、S_τ も不変である。

- くりこみ群発展のもとで、変形されたカイラル対称性が保存される：S_{τ_0} が

$$\int d^D x \left\{ S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)} S_\tau \right.$$
$$\left. + 2iS_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)} S_\tau - 2i \,\mathrm{tr}\left[\gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)} S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \right] \right\} = 0$$

  の $\tau = \tau_0$ を満たすなら、S_τ も満たす。これは Ginsparg-Wilson 関係式の一般化

GFERG での Polchinski 方程式

- 積分表示の τ 微分から

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau} e^{S_\tau[A,\psi,\bar{\psi}]} \\
&= \int d^D x \, \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)} \Bigg[-2D_\nu F^a_{\nu\mu}(x) - 2\alpha_0 D_\mu \partial_\nu A^a_\nu(x) \\
&\qquad\qquad - \left(\frac{D-2}{2} + \gamma_\tau + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) A^a_\mu(x) \Bigg] \Bigg|_{A \to A + \delta/\delta A} e^{S_\tau[A,\psi,\bar{\psi}]} \\
&\qquad + (\text{フェルミオンの寄与})
\end{aligned}
$$

が得られる

- 場の 4 階までの汎関数微分を含んでいる（通常の ERG は 2 階まで）

摂動論的解析

- Gauss 固定点周りで、ゲージ結合 g_τ に関する摂動展開ができる

摂動論的解析

- Gauss 固定点周りで、ゲージ結合 g_τ に関する摂動展開ができる
- $D=4$ 純非可換ゲージ理論で $O(g_\tau^2)$ までの解析から、ゲージ場の異常次元（ベータ関数）として

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{7}{2}C_A g_\tau^2$$

を得た（C_A は $f^{acd}f^{bcd} = C_A\delta^{ab}$ で定義される adjoint 表現の Dynkin index）(Sonoda-H.S., unpublished)。これは、期待される値

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{11}{3}C_A g_\tau^2$$

とは異なっている

摂動論的解析

- Gauss 固定点周りで、ゲージ結合 g_τ に関する摂動展開ができる
- $D = 4$ 純非可換ゲージ理論で $O(g_\tau^2)$ までの解析から、ゲージ場の異常次元（ベータ関数）として

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{7}{2}C_A g_\tau^2$$

を得た（C_A は $f^{acd}f^{bcd} = C_A\delta^{ab}$ で定義される adjoint 表現の Dynkin index）(Sonoda-H.S., unpublished)。これは、期待される値

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{11}{3}C_A g_\tau^2$$

とは異なっている

- 少なくとも摂動論では、初期 Wilson 作用 S_{τ_0} にゲージ固定が必要に思われる：

$$\left\langle A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)\right\rangle_0 \sim \delta^{ab}\int_k e^{ik(x-y)}\frac{1}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)e^{-2tk^2}+\xi_\tau\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}e^{-2\alpha_0 tk^2}\right]$$

ゲージ固定なし $\to \xi_\tau = \infty$

ゲージ固定を取り入れる GFERG

- Faddeev-Popov (FP) ゴースト・反ゴースト場、中西-Lautrup (NL) 場を導入
- 拡散方程式は BRST 変換

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu^a(x) &= \partial_\mu c^a(x) + g_\tau f^{abc} A_\mu^b(x) c^c(x) \\
\delta c^a(x) &= -\frac{1}{2} g_\tau f^{abc} c^b(x) c^c(x) \\
\delta \bar{c}^a(x) &= B^a(x) \\
\delta B^a(x) &= 0
\end{aligned}
$$

と consistent なものを採用

- しかし、単純な scrambler

$$
\begin{aligned}
\hat{s} \equiv \exp&\left[+\int d^D x\, \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x)}\right] \\
&\times \exp\left[\int d^D x\, -\frac{\delta}{\delta c^a(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a(x)}\right] \exp\left[-\int d^D x\, \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta B^a(x) \delta B^a(x)}\right]
\end{aligned}
$$

は BRST 不変ではない $\rightarrow$（再び）変形された BRST 対称性. . .

少なくとも量子電磁力学のような可換ゲージ理論ではうまく行く

- NL 場は消去できる
- FP ゴーストが GFERG から完全に decouple し、ゴーストセクターは解けてしまう
- BRST 対称性は、Ward-Takahashi (WT) 恒等式

$$ik_\mu \frac{\delta S_\tau}{\delta A_\mu(k)} + \frac{k^2}{\xi_\tau E(e^{-2\tau}k^2)e^{-2k^2}} ik_\mu \left[A_\mu(-k) + \frac{\delta S_\tau}{\delta A_\mu(k)}\right]$$
$$+ ig_\tau \int_p S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(p+k)}\psi(p) - ig_\tau \int_p \bar{\psi}(-p-k)\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(-p)} S_\tau = 0$$

に帰着する。これは Wilson 作用の一次式

- 通常の ERG での WT 恒等式は、Wilson 作用の無限次まで含む
- $O(g_\tau^2)$ までの摂動論的解析：ベータ関数

$$\beta = -2\gamma g^2 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{8}{3}g^4 + \cdots$$

フェルミオンの質量異常次元、波動関数異常次元：

$$\beta_m = \frac{6}{(4\pi)^2}g^2 + \cdots \qquad \gamma_F = \frac{3}{(4\pi)^2}g^2 + \cdots$$

後者は、フローさせたフェルミオンのそれ (Lüscher) になっている

GFERG での複合演算子（きれいなスケーリングに従う object）

- GFERG での複合演算子 $\mathcal{O}_\tau(x)$（スケーリング次元 $-y_\tau$）は
$$\left(\partial_\tau - x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + y_\tau - \mathcal{D}_\tau\right)\mathcal{O}_\tau(x) = 0$$
を満たすものとして定義する。ここで
$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_\tau\mathcal{O}_\tau(x)\\
&\equiv -e^{-S_\tau}\Bigg[\hat{s}\int d^Dx\,\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}\Bigg[2D_\nu F_{\nu\mu}^a(x) + 2\alpha_0 D_\mu\partial_\nu A_\nu^a(x)\\
&\qquad + \left(\frac{D-2}{2} + \gamma_\tau + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)A_\mu^a(x)\Bigg]\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}, \mathcal{O}_\tau(x)\Bigg]\\
&\qquad + (\text{フェルミオンの寄与})
\end{aligned}$$
- 複合演算子の例（スケーリング次元 $(D-2)/2+\gamma_\tau$）：
$$\mathcal{A}_\mu^a(x) \equiv e^{-S_\tau}\hat{s}A_\mu^a(-1,x)\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}$$
ここで $A_\mu^a(-1,x)$ は、拡散方程式
$$\partial_t A_\mu^a(t,x) = D_\nu F_{\nu\mu}^a(t,x) + \alpha_0 D_\mu\partial_\nu A_\nu^a(t,x) \qquad A_\mu^a(0,x) = A_\mu^a(x)$$
を時間の逆向きに $t=-1$ まで解いた解
- これはスカラー場理論での $e^{-\partial^2}\phi(x)$ の対応物

't Hooft アノマリーの非くりこみ性：Adler-Bardeen 定理への応用

- $D=4$、フェルミオンは massless とする。まずは、ダイナミカルなゲージ場は入れない
- 大局的な対称性は $SU(N)_L \times SU(N)_R$ とする
- この対称性のアノマリーを考えるため、$SU(N)_L$、$SU(N)_R$ のカレントと結合する外部ゲージ場、$L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$、大局的変換をゲージ (BRST) 変換に格上げした時の変換のゴースト場、$\chi_L^A(x)$ と $\chi_R^A(x)$ を導入
- Wilson 作用はこれらの場にも依存している。構成法はこれまでと同様。ただし scrambler $\hat{s}$ には、$L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$、$\chi_L^A(x)$ と $\chi_R^A(x)$ は入れない
- BRST 変換の生成子

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} \equiv \int d^D x \Bigg\{ & \left[\partial_\mu \chi_L^A(x) + f^{ABC} L_\mu^B(x) \chi_L^C(x)\right] \frac{\delta}{\delta L_\mu^A(x)} \\
& - \frac{1}{2} f^{ABC} \chi_L^B(x) \chi_L^C(x) \frac{\delta}{\delta \chi_L^A(x)} \\
& - \chi_L^A(x) t^A P_L \psi(x) \frac{\delta}{\delta \psi(x)} + \chi_L^A(x) \bar{\psi}(x) P_R t^A \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \Bigg\} \\
& + (\text{right-handed part})
\end{aligned}$$

- 変形された BRST 変換の生成子を $\tilde{\hat{\delta}} \equiv \hat{s}\hat{\delta}\hat{s}^{-1}$ とする

- 拡散方程式が BRST 変換の元で不変なことから、

$$\tilde{\hat{\delta}} e^{S_\tau} = \hat{s} \int [d\psi' d\bar{\psi}' dL' d\chi_L' dR' d\chi_R'] \, (\text{delta functions}) (\hat{s}')^{-1} \tilde{\hat{\delta}}' e^{S_{\tau_0}}$$

- これは、Wilson 作用の積分表示と同じ式：

$$e^{S_\tau} = \hat{s} \int [d\psi' d\bar{\psi}' dL' d\chi_L' dR' d\chi_R'] \, (\text{delta functions}) (\hat{s}')^{-1} e^{S_{\tau_0}}$$

- 従ってアノマリーで微小変形された Wilson 作用（η は無限小グラスマン数）

$$e^{S_\tau} - \eta \tilde{\hat{\delta}} e^{S_\tau} = \exp\left(S_\tau - \eta e^{-S_\tau} \tilde{\hat{\delta}} e^{S_\tau} \right)$$

  は、再び GFERG を満たす。
- これは、アノマリー

$$\mathcal{Q}_{\chi_L, \chi_R} \equiv -e^{-S_\tau} \tilde{\hat{\delta}} e^{S_\tau}$$

  がスケーリング次元 $D = 4$ の複合演算子であることを示している
- S_τ が局所的であれば、$\mathcal{Q}_{\chi_L, \chi_R}$ も局所的（実は S_τ の局所性は自明ではなく、counter term を必要とする）

't Hooft アノマリーの非くりこみ性：Adler-Bardeen 定理への応用

- 't Hooft アノマリー $\mathcal{Q}_{\chi_L,\chi_R}$ は、外部ゲージ場、$L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$ とゴースト場、$\chi_L^A(x)$ と $\chi_R^A(x)$ の関数とする。
- きれいなスケーリングに従う場たち：

$$L_\mu^A(-1,x), \quad R_\mu^A(-1,x), \quad \chi_L^A(-1,x), \quad \chi_R^A(-1,x)$$

  これらの局所積もきれいなスケーリングに従う
- さらに、これらは単純な BRST 変換に従うことも示せる：

$$\begin{aligned}
\delta L_\mu^A(-1,x) &= \partial_\mu \chi_L^A(-1,x) + f^{ABC} L_\mu^B(-1,x)\chi_L^C(-1,x),\\
\delta \chi_L^A(-1,x) &= -\frac{1}{2} f^{ABC} \chi_L^B(-1,x)\chi_L^C(-1,x),\\
\delta R_\mu^A(-1,x) &= \partial_\mu \chi_R^A(-1,x) + f^{ABC} R_\mu^B(-1,x)\chi_L R^C(-1,x),\\
\delta \chi_R^A(-1,x) &= -\frac{1}{2} f^{ABC} \chi_R^B(-1,x)\chi_R^C(-1,x),
\end{aligned}$$

- さらに、アノマリーは Wess–Zumino 無矛盾条件

$$\delta \mathcal{Q}_{\chi_L,\chi_R} = 0$$

  を満たすことも言える

't Hooft アノマリーの非くりこみ性：Adler-Bardeen 定理への応用

- アノマリーは、Wess–Zumino 無矛盾条件の局所的な解。通常の議論が使えて（GFERG では V 対称性は保てるので Bardeen 型が自然）

$$\mathcal{Q}_{\chi_L,\chi_R} = c \int d^4x\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{tr}\left[\chi_5(-1,x) F_{v,\mu\nu}(-1,x) F_{v,\rho\sigma}(-1,x) + \cdots\right]$$

ここで

$$\chi_5(x) \equiv \frac{1}{2}\left[\chi_R(x) - \chi_L(x)\right], \qquad v_\mu(x) \equiv \frac{1}{2}\left[R_\mu(x) + L_\mu(x)\right]$$

- GFERG から

$$\frac{d}{d\tau} c = 0$$

これは、't Hooft アノマリーはくりこみスケールによらないことを示す

- 以上の話に、ダイナミカルなゲージ場を入れることもできる。その場合も、't Hooft アノマリーはくりこみスケールによらないので、ゲージ結合にも依存できない（Adler–Bardeen 定理）はず。
- 摂動の最低次での計算 (Y. Miyakawa, arXiv:2201.08181) から

$$c = \frac{1}{16\pi^2}$$

- ERG の非摂動論的応用には、通常いわゆる 1PI 作用 Γ_τ に対する ERG 方程式 (Nicoll-Chang, Wetterich, Morris, Bonini-D'Attanasio-Marchesini) が用いられる
- GFERG でも対応するものが作れる：Legendre 変換は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_\mu(x) &\equiv A_\mu(x) + \frac{\delta S_\tau}{\delta A_\mu(x)} = e^{-S_\tau}\hat{s}A_\mu(x)\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}\\
\Psi(x) &\equiv \psi(x) + i\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)}S_\tau = e^{-S_\tau}\hat{s}\psi(x)\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}\\
\bar{\Psi}(x) &\equiv \bar{\psi}(x) + iS_\tau\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} = e^{-S_\tau}\hat{s}\bar{\psi}(x)\hat{s}^{-1}e^{S_\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\tau[\mathcal{A}_\mu,\Psi,\bar{\Psi}] - \frac{1}{2}\int d^Dx\,\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}_\mu(x) + i\int d^Dx\,\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\\
&\equiv S_\tau[A_\mu,\psi,\bar{\psi}] + \frac{1}{2}\int d^Dx\,A_\mu(x)A_\mu(x) - i\int d^Dx\,\bar{\psi}(x)\psi(x)\\
&\qquad - \int d^Dx\,\mathcal{A}_\mu(x)A_\mu(x) + i\int d^Dx\,\left[\bar{\Psi}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\Psi(x)\right]
\end{aligned}
$$

- 明白なゲージ不変性とカイラル対称性が保たれる（可換ゲージ理論では状況は特によい）
- GFERG 方程式は複雑

まとめ

- 厳密くりこみ群 (ERG) と場の拡散の関係に着目して、明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ ERG、グラディエントフロー厳密くりこみ群 (GFERG) を定式化した
- 特に可換ゲージ理論 (QED) では明白なゲージ (BRST) 対称性を保つ単純な定式化が可能
- ガウス固定点周りでの相関関数の有限性を、グラディエントフローのくりこみ可能性 (Lüscher-Weisz) から議論した。これは、グラディエントフローに基づいたくりこみ群 (Lüscher, Aoki-Balog-Onogi-Weisz, Abe-Fukuma, Makino-Morikawa-H.S., Carosso-Hasenfratz-Neil, Kitazawa-H.S., Tanaka-Kitazawa-Morikawa-Suzuki) との関連も示している
- 複合演算子の概念も導入できる
- ここでは、't Hooft アノマリーの非くりこみ定理への応用を議論した
- 1PI 作用の version も作れる

今後の課題

- $D = 4$ 非可換ゲージ理論での摂動論的解析から、少なくとも摂動論では、ゲージ固定が必要に思われる
- これは、一般には、変形された BRST 対称性の複雑性に導く
- 非摂動論的にもゲージ固定が必要か？？？
- FP ゴーストが必要ない定式化（cf. 確率過程量子化）はできないか
- 一方少なくとも可換ゲージ理論 (QED) では明白な BRST 対称性を保つ単純な定式化が可能
- これは、可換ゲージ理論での非自明な固定点の解析に有用なはず。過去の研究（Aoki-Morikawa-Sumi-Terao-Tomoyose, Gies-Jaeckel, Igarashi-Itoh-Pawlowski, Gies-Ziebell など）との比較
- 非可換ゲージ理論での非摂動論的応用？
- 重力理論？