量子ブラックホールの情報喪失問題

宇賀神　知紀

(京大白眉, 基研)

ICEPP シンポジウム 2023 年 2月 20日

CGPQI
Center for Gravitational Physics and Quantum Information
Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University

Hakubi 白眉 Kyoto Univ.

YITP
YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

Self Introduction

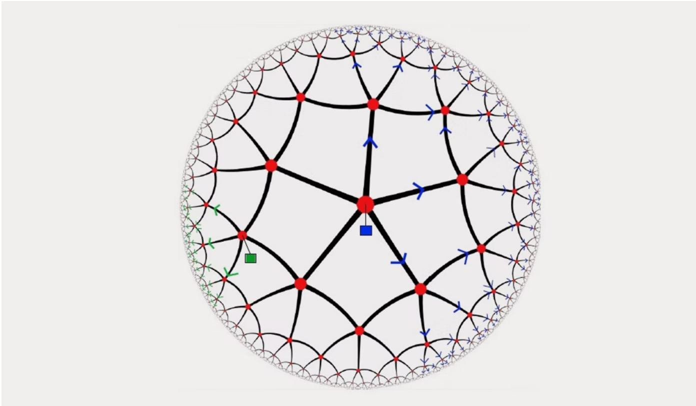
Position: Hakubi assistant professor, Kyoto university

Career: 2009 - 2014: IPMU, U.Tokyo

2014 - 2017: UCSB (KITP)

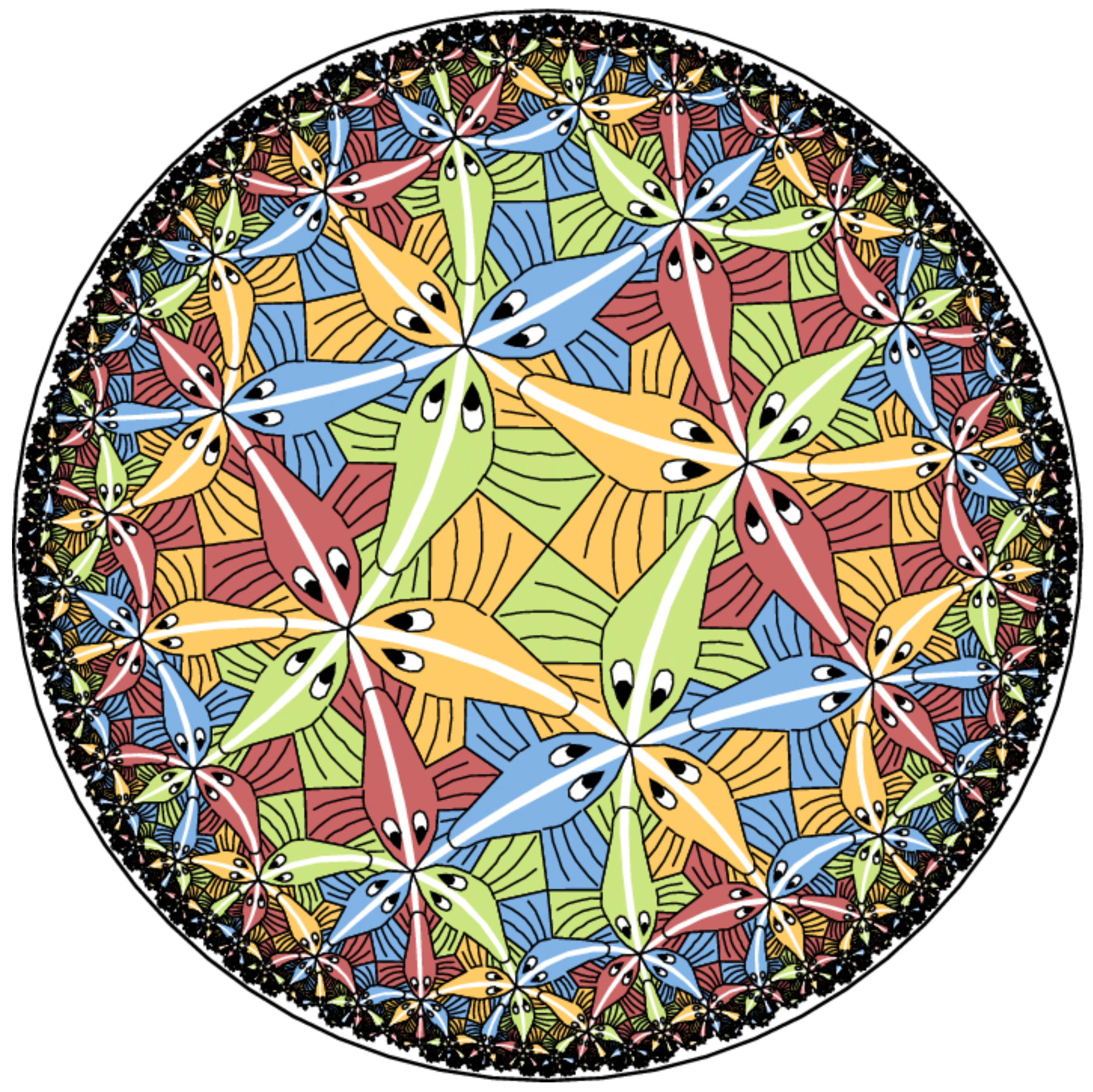
2017-2019 : OIST

2019 -2020: U. Penn (It from qubit fellow supported by Simons foundation)



Summary of my study

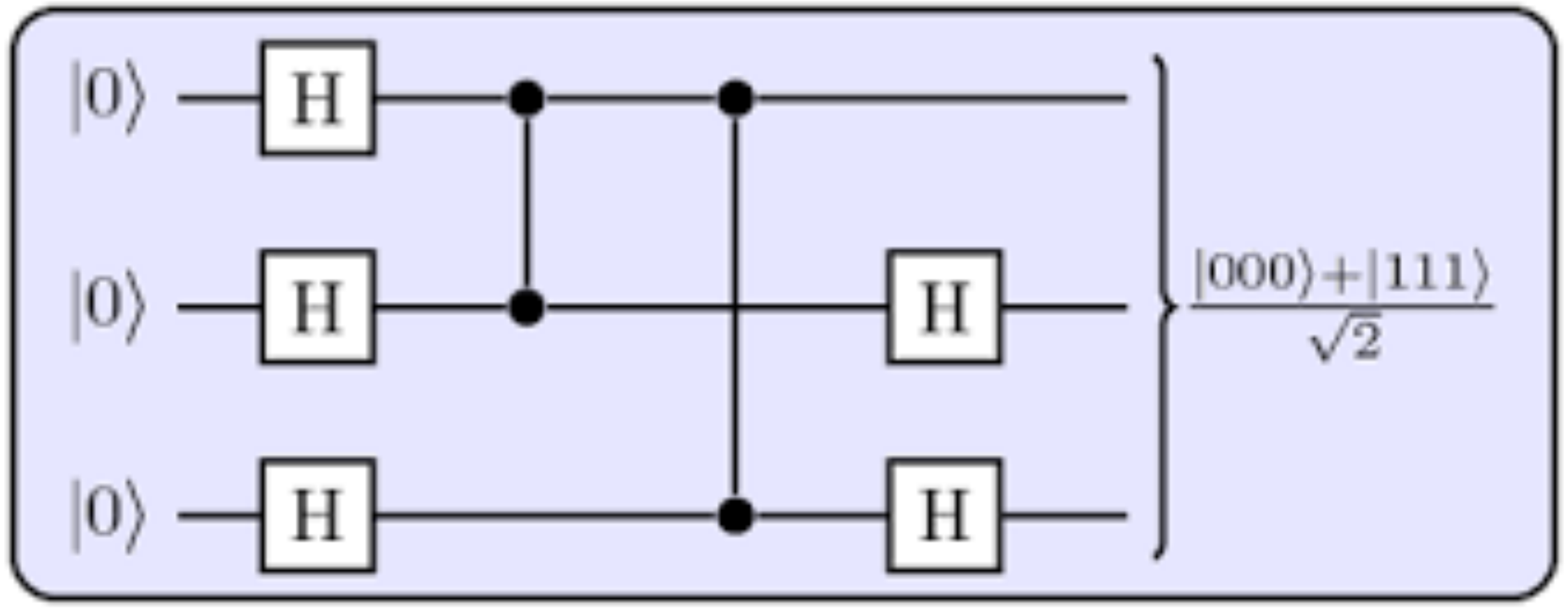
Target：Quantum gravity (emergence of spacetime)

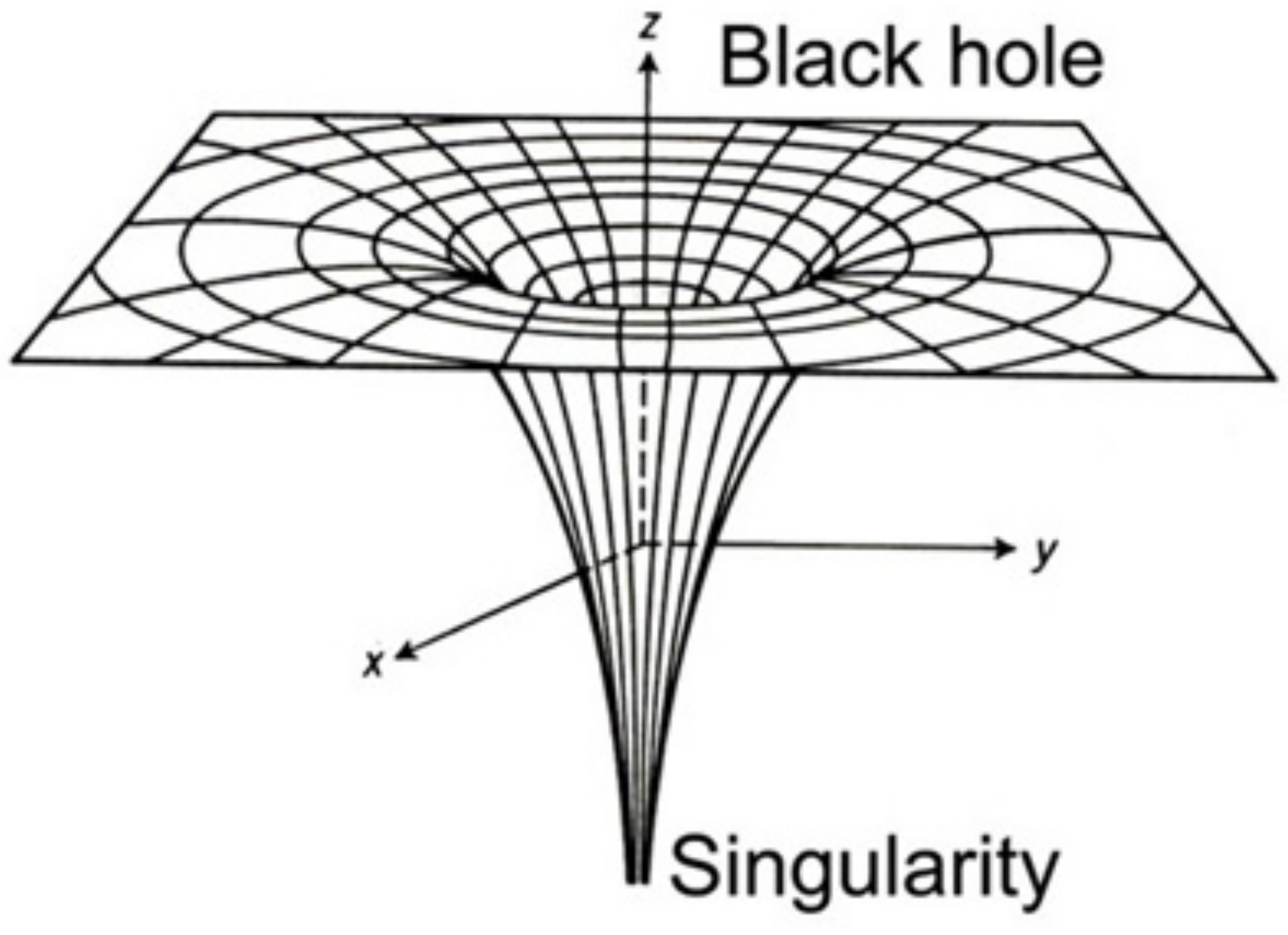


AdS space

Keywords：AdS/CFT correspondence、Black hole (holographic principle)

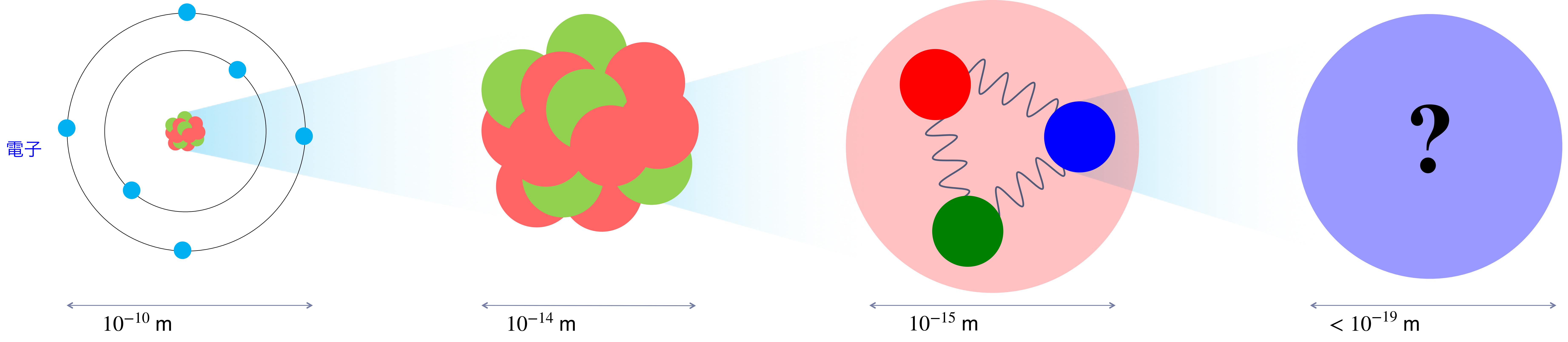
Mean：Quantum information theory（The island formula、 Relative entropy)





素粒子論とは

森羅万象を、ミクロな世界の物理法則に還元する試み



現時点では、世界を 物質と時空に分けて記述

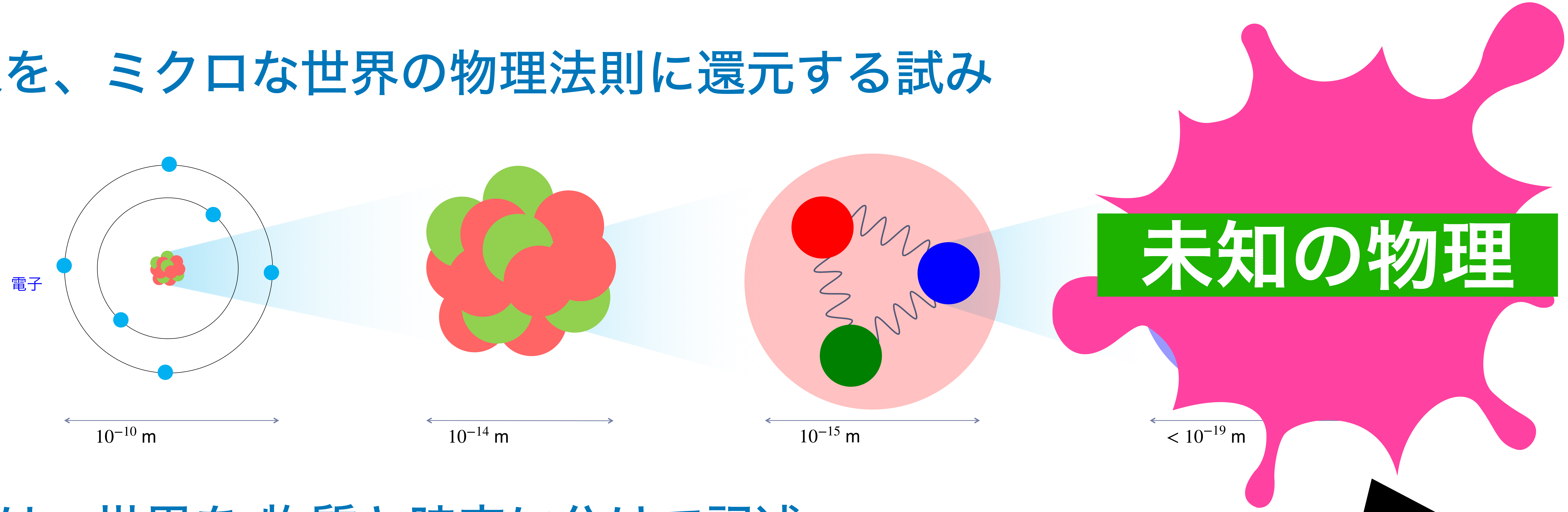
物質：量子論＋素粒子の標準模型

時空：マクロには一般相対性理論

未だ
様々な謎

素粒子論とは

森羅万象を、ミクロな世界の物理法則に還元する試み



現時点では、世界を 物質と時空に分けて記述

物質：量子論＋素粒子の標準模型

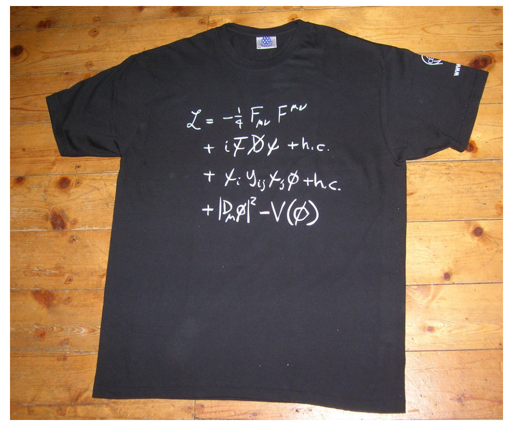
時空：マクロには一般相対性理論

未だ
様々な謎

量子重力理論における様々な問題

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \sqrt{-g}R + \big(\text{matter QFT}\big) + \cdots$$

重力セクター: 一般相対論の作用



(1) 重力セクターの量子化: 一般相対論は繰り込み不可能 ($G \sim 1$) ➡ プランクスケールの物理

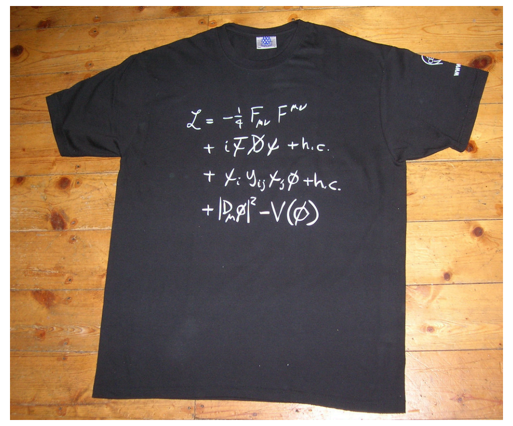
(2) “Classical GR” + matter QFT　($G \ll 1$)

古典的な重力（時空）に少しだけ（物質由来の）量子効果を加える

量子重力理論における様々な問題

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \sqrt{-g}R + \left(\text{matter QFT}\right) + \cdots$$

重力セクター: 一般相対論の作用



(1) 重力セクターの量子化: 一般相対論は繰り込み不可能 $(G \sim 1)$ ➡ プランクスケールの物理

(2) “Classical GR” + matter QFT　$(G \ll 1)$

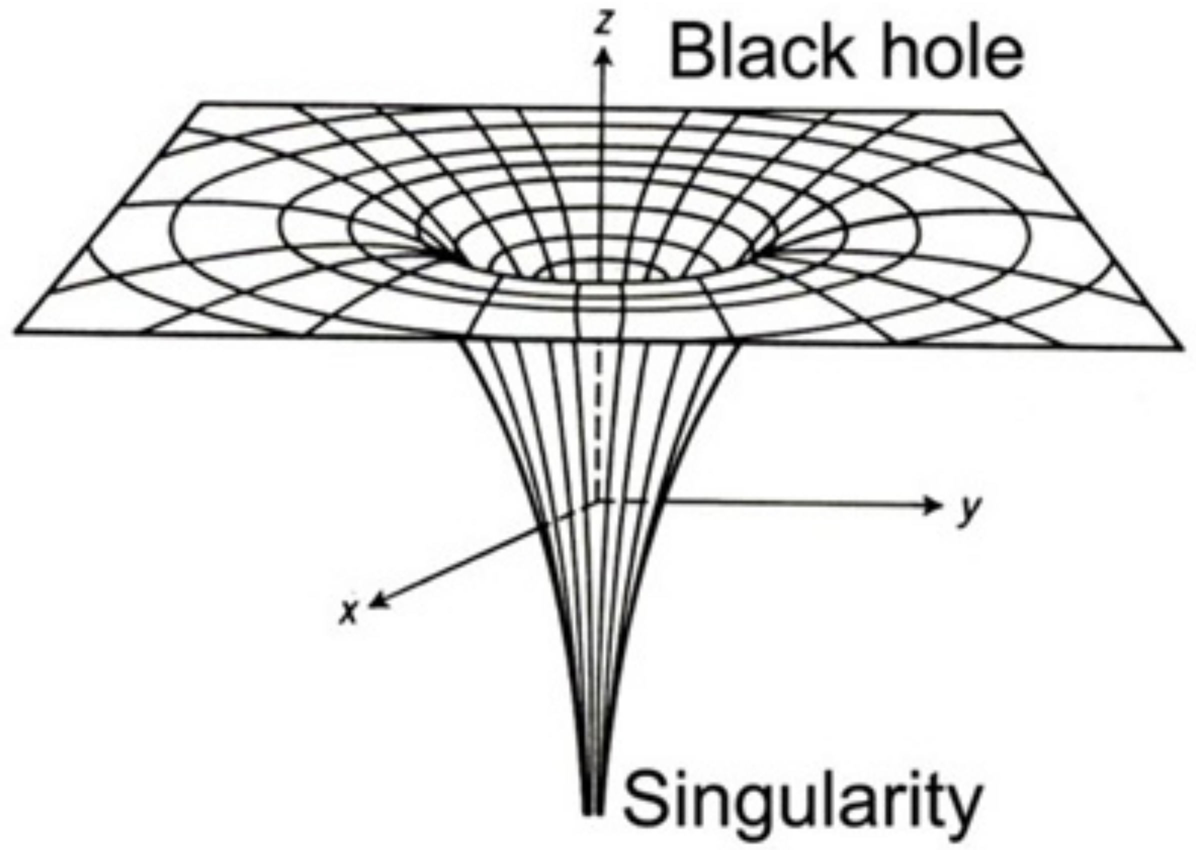
古典的な重力（時空）に少しだけ（物質由来の）量子効果を加える

ブラックホールの情報喪失問題

今日お伝えしたいこと

AdS/CFT 対応と量子情報理論を組み合わせて解析することで、
近年情報喪失問題の理解に進展があった。（アイランド公式）

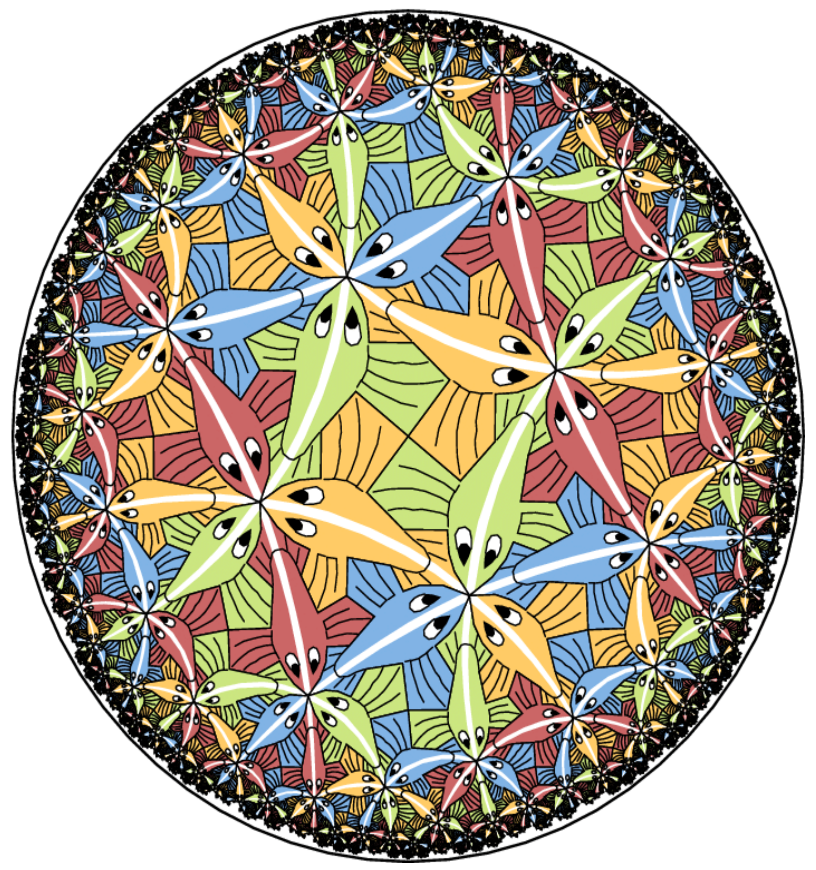
本講演の流れ



(1)ブラックホールの情報喪失問題とは何か？

ブラックホールの熱力学的エントロピー　　ホーキング放射　　情報喪失問題

(2) AdS /CFT 対応とホログラフィックエンタングルメントエントロピー



(3)ホーキング放射のアイランド公式

References

Island à It

Pennington : 1905.08255

Alumheiri et al : 1905.08762.

Alumheiri et al : 1908.10966

Replica WH

Alumheiri et al : 1911.12333 (East coast paper)

Pennington et al 1911.11977 (West coast paper)

Review : 2006.06872

Balascbramanian, Kar, Parrikar, Sarosi. TU. 2003.04333

Balascbramanian, Kar, Ross. TU. 2007.04333

Balascbramanian, Kar, TU. 2008.05274

Balascbramanian, Kar, TU. 2008.05725

Balascbramanian, Kar, TU. 2104.13383

Miyata, TU 2104.00183

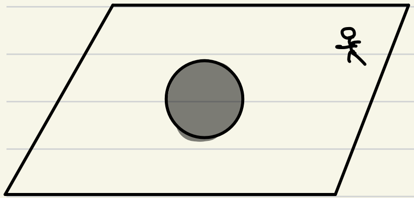
Goto, Kusuki, Tamaoka, TU, 2108.08308

Miyata, Iizuka, TU, 2117.07107.

Miyata, TU, 2111.07107

Goto Suzuki TU, 2111.11705

ブラックホール



- 高密度の天体が、崩壊してできた時空
- アインシュタイン方程式の解

(4次元) シュバルツシルトブラックホール

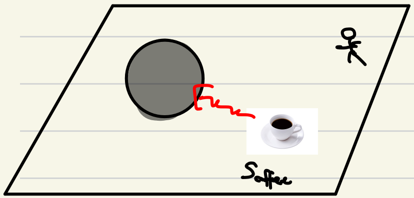
$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

M: BHの質量

事象の地平面 $r=2M$: その内側から外側に行くことができない。

: ブラックホールがブラックである理由

ブラックホールの熱力学 (Bekenstein Hawking)



・BH に熱力学エントロピーを持つ物体を投げいれる

⇒ $\Delta S = -S_{Coffee} < 0$?（第二法則が破れる？）

BHエントロピー：BHは事象の地平面の面積に比例するエントロピーを持つ。

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N}$$

$S_{BH} \propto A$ と Bekenstein が予想。

係数は(以下に述べる方法で) Hawking が決めた。

⇒ Bekenstein Hawking エントロピーと呼ばれる。

BH 熱力学

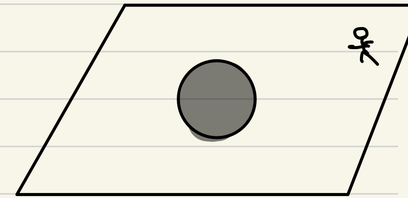
(1) 第一法則 : $dE = TdS$

$\Leftrightarrow \quad dM_{BH} = T_{BH}\, dS_{BH}$ 　　 T_{BH} : ブラックホールの温度.

(2) 第二法則 (エントロピー増大則)

$\Leftrightarrow \quad \delta A_{BH} \geq 0$ 　　 (面積定理)

$\Rightarrow$ Bekenstein Hawking エントロピーは熱力学とコンシステント。



$S_{BH} = \dfrac{A}{4G_N}$ が示唆すること.

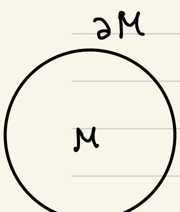
(1) $\boxed{S_{BH}\text{ が熱力学エントロピーである：}}$

⇒ 1つのBHが，実は $e^{S_{BH}}$ 個の微視的状態からなる。

〜 BHの内側のとりうる状態数を

(2) $\boxed{S_{BH}\text{ が体積ではなく，面積に比例する.}}$

(cf. 気体のエントロピー $S_{gas} \propto V$)



⇒ BH(重力)のは，事象の地平面上に局在する自由度で記述できる

：ホログラフィー原理. (例：AdS/CFT対応)

Bekenstein 限界

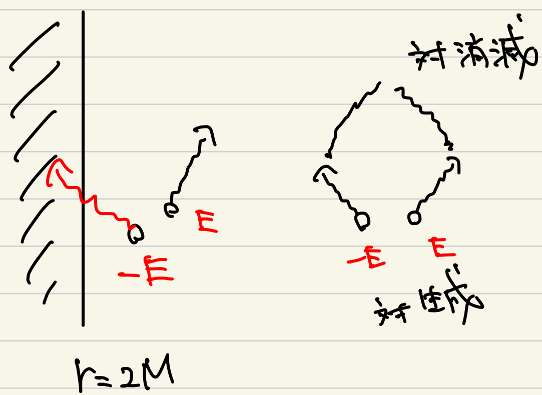
BH の Hawking 放射

- BH について，（少なくとも形式的に）温度とエントロピー が定義できた。

- 温度を持つ物体は **黒体放射** を出していなければならない．

⇔ "BH が何でも吸収する" という性質に矛盾？

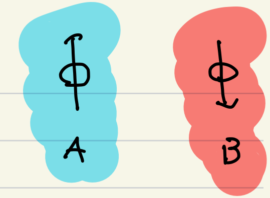
⇒ 量子論的には，BH は放射を出している（Hawking 放射）



- 対生成による直観的な理解

⇒ 対生成によって生じた負エネルギー粒子が事象の地平面に入ることにより安定化する

量子相関とは



- $$\boxed{|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right)}$$

∵ $\begin{cases} \text{Bの状態が } |\downarrow\rangle_B \Rightarrow \text{Aの状態は } |\uparrow\rangle_A \\ \text{Bの状態が } |\uparrow\rangle_B \Rightarrow \text{Aの状態は } |\downarrow\rangle_A \end{cases}$

- $|\Psi_{AB}\rangle$において，Aの状態とBの状態は相関している

- Bellの不等式を破る ⇒ 量子相関（エンタングルメント）

- Aのみを見る観測者は，Bについて平均をとった状態を

$$\rho_A = \sum_{i=\{\downarrow,\uparrow\}} {}_B\langle i|\Psi\rangle\langle\Psi|i\rangle_B = \mathrm{tr}_B\, |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|$$ （混合状態）

量子相関とは(2)

一般に、$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (\text{Schmit 分解})$$

$$\Rightarrow \quad \rho_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, |i\rangle_A \langle i| \quad (i = 1, \cdots \underset{\text{''}}{r}\, \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\})$$

(縮約された密度行列)

・$|\Psi\rangle_{AB}$ における A と B の相関の定量化 ⇒ エンタングルメント エントロピー

$$\boxed{S(\rho_A) = -\mathrm{tr}\, \rho_A \log \rho_A}$$

(cf. 密度行列 ρ に対する von Neumann エントロピー $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \log \rho)$)

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_A\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|\right) \Rightarrow -\mathrm{tr}\,\rho_A \log \rho_A$$
$$= \log 2$$

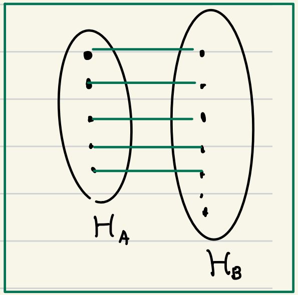
エンタングルメントエントロピー

・例：

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B\right) \Rightarrow S(\rho_A) = \log 2$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \Rightarrow S(\rho_A) = 0$$

$|\Psi_{AB}\rangle$



・ $$\boxed{S(\rho_A) \leq \min\{\log \dim H_A,\ \log \dim H_B\}}$$

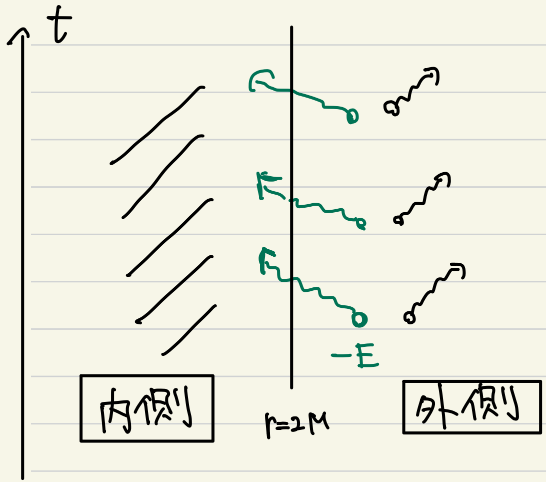
$$\left(\because\ |\Psi\rangle = \sum_{r=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, |i\rangle_A |i\rangle_B \Rightarrow S(\rho_A) = \sum_i \lambda_i \log \lambda_i,\quad \sum \lambda_i = 1\right)$$

・ $\boxed{\text{純粋状態に対して } S(\rho_A) = S(\rho_B)}$

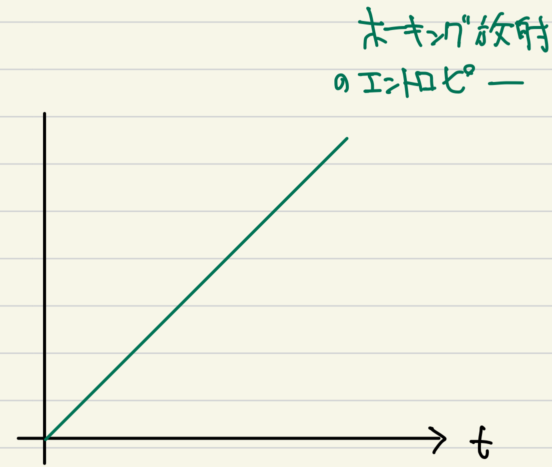
$$\left(\forall_{\text{pure state}},\ \rho_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |i\rangle_A\langle i|,\quad \rho_B = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |i\rangle_B\langle i|\right)$$

BHの内側と外側のエンタングルメント

ホーキング放射によって事象の地平面の内側と外側のエンタングルメントが上昇し続ける。



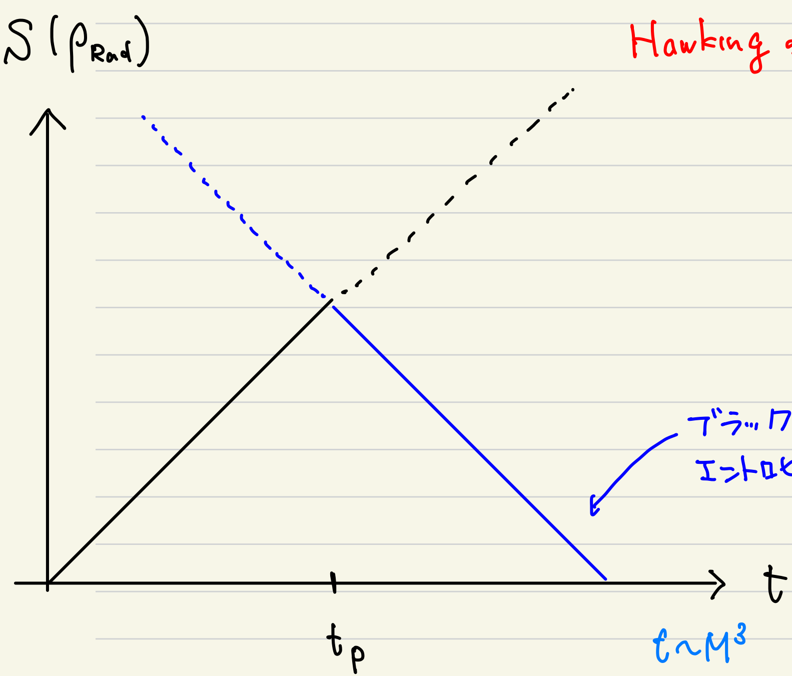
$\Longrightarrow$



一方 一般論から $S(\rho_A) \le \log \min\{ \underbrace{\dim H_{内側}}_{= e^{S_{BH}}},\ \dim H_{外側} \}$

矛盾!!

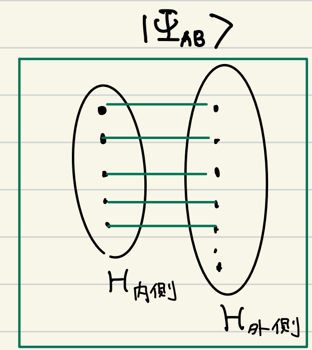
ホーキング放射のエントロピーの正しいふるまい (Page曲線)



量子論のユニタリー性

⇒ $t > t_p$ (Page時間)

$S(\rho_{Rad}) \sim S_{BH}$



ページ時間以降, $S(\rho_{Rad})$ を正しく計算する公式は何か?

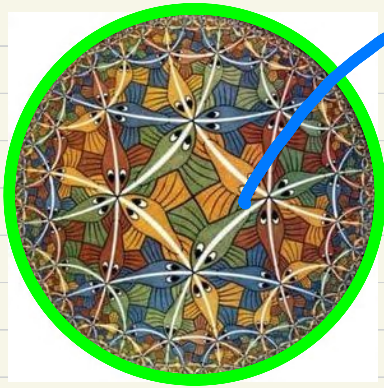
$\Rightarrow$ アイランド公式 [Penington]
[Almheiri...]
[Almheiri...]

AdS/CFT 対応 と

ホログラフィック エンタングルメント
エントロピー

AdS/CFT 対応とは?

[Maldacena 97]



d+1 次元 反ドジッター空間 (Anti de Sitter) 上の 量子重力理論 (超弦理論)

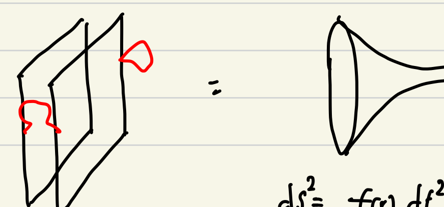
|| 等価

d 次元の境界に住む (重力を含まない) 場の量子論 (共形場理論)

AdS_{d+1} の時間一定面

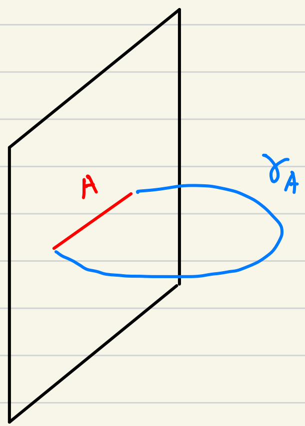
・ホログラフィー原理の具体例

・超弦理論のDブレーンの二つの記述から来る。(開弦, 閉弦)



$$ds^2 = f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\vec{x}^2$$

Holographic entanglement entropy [Ryu - Takayanagi]



CFT における領域 A のエンタングルメントエントロピーは、
AdS 側の極小曲面の面積で計算される。

$$\boxed{S_A = \min_{\gamma_A} \frac{A(\gamma_A)}{4G_N}}$$ (RT 公式)

γ_A : A の境界 ∂A に end するバルク時空上の曲面

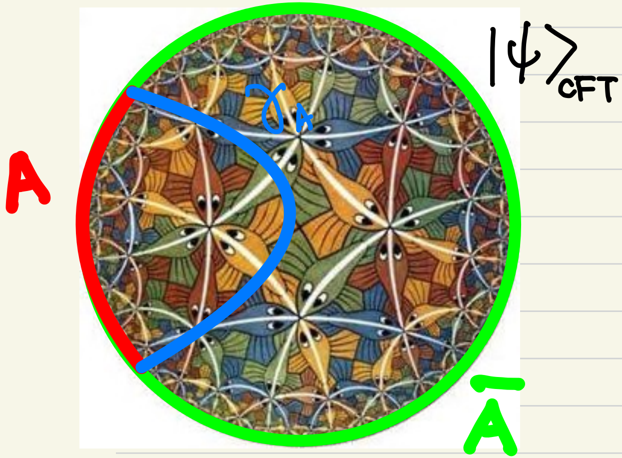
・CFT の熱力学的エントロピー $= S_{BH}$ の拡張とみなせる。

・時空が static ではない場合の拡張 (HRT 公式)

Extremal surface $\gamma_A = \gamma_A^{Ex}$: $\left.\frac{\delta \text{Area}}{\delta \gamma_A}\right|_{\gamma=\gamma_A^{Ex}} = 0$ を用いて $S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A^{Ex})}{4G_N}$

Entanglement Wedge reconstruction

・CFTの状態から、どのように bulk 時空の情報を再構成するのか?



・CFTの 領域 A の情報から (ρ_A から)
再構成できる時空の領域はどこか?

⇒ 領域 A と minimal surface γ_A で囲まれた部分

(A についてのエンタングルメントウェッジ $\Sigma(A)$)

・CFT状態が 純粋状態 ⇒ $\boxed{\gamma_A = \gamma_{\bar{A}}}$

⇒ $\Sigma_A \cup \Sigma_{\bar{A}}$ = 時間一定面全体

後で超重要!!

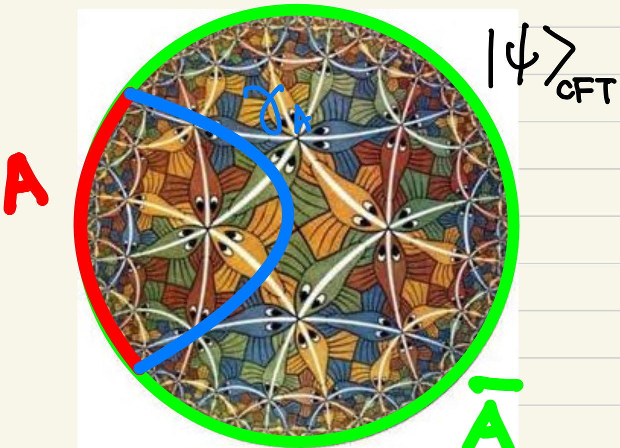
HEEに対する量子補正

・RT公式は bulkの重力が完全に古典的な場合 $G_N \to 0$ にのみ正しい。

$1/G_N$ 補正を入れた時、bulkの理論は $\boxed{\text{Einstein 重力} + \text{バルク時空上の QFT}}$ で記述される。

CFT側の状態は、$(g_{\mu\nu}, |\psi\rangle_{\substack{bulk\\QFT}})$ の組で指定される。

量子補正入りの HEE 公式



$$\boxed{S_{CFT,A} = \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min\,Ext}}\left[\frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N} + S_{\substack{bulk\\QFT}}(\Sigma_A)\right]}$$

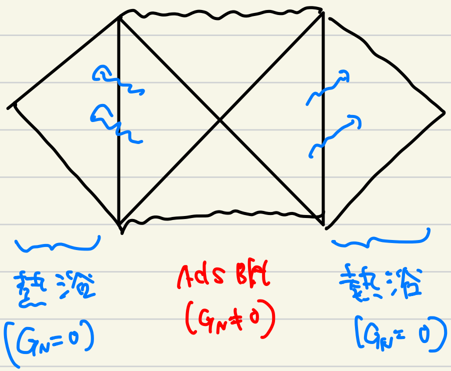
: $S_{\substack{bulk\\QFT}}(\Sigma_A)$: bulk時空のQFTの、Σ_A についての entanglement entropy.

ホーキング放射のエントロピー

とアイランド公式

情報喪失問題への応用：セットアップ

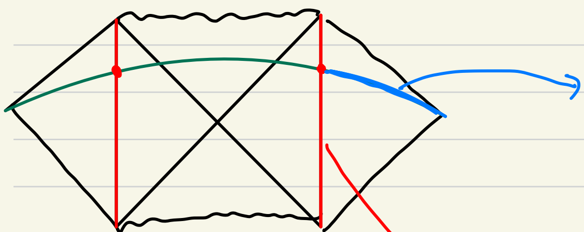
- AdS BH の境界の外側に（BH から出てきた Hawking 放射を集める）熱浴をくっつける



$$H_{tot} = H_{AdS\,BH} \otimes H_R$$

$H_{AdS\,BH}$：BH の微視的状態 $\in H_{CFT}$

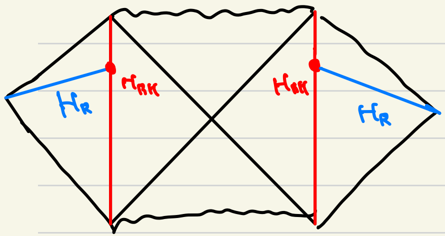
H_R：AdS boundary から出てくる Hawking 放射



H_R は外側の Non gravitating bath 上で定義

$H_{AdS\,BH} \subset H_{CFT}$ は gravitating region (AdS) の境界で定義されている。

情報喪失問題への応用：計算するべきもの



・時間一定面上では，$H_{AdS\,BH}$ と H_R のエンタングルド状態が実現．Pure state だとすると，

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{R} |\psi_i\rangle_{AdS\,BH} \otimes |i\rangle_R}$$

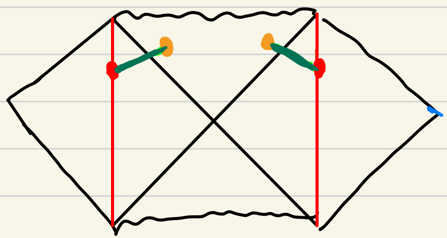
・我々が計算したいもの：ホーキング放射のエントロピー

$$\boxed{S(\rho_R) \overset{\text{Parity}}{=} S(\underset{\substack{\shortparallel \\ AdS\,BH}}{\rho_{CFT}}) \overset{\text{HEE}}{=} \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min\,Ext}} \left[\frac{A(\gamma)}{4G_N} + S_{bulk}(\Sigma_A) \right]}$$

・time slice 上の状態は $(g_{\mu\nu}, |\psi\rangle)$ で指定される。

BHのEWとホーキング放射のEW

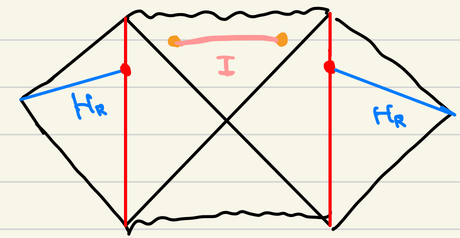
BHについてのEWが分かれば、その補集合をとることにより、ホーキング放射のEWが分かる



補集合

$\Longrightarrow$

全体系は pure state



● : BHに対するQES

— : BHに対するエンタングルメントウェッジ

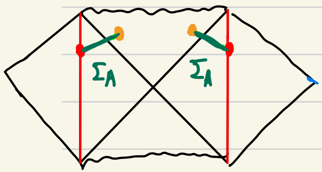
● H_Rに対するQES

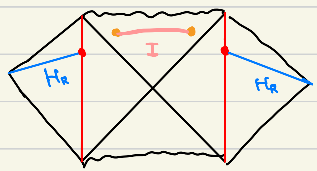
$R \cup I$: ホーキング放射のエンタングルメントウェッジ

$\boxed{\text{BH内部の構造はホーキング放射の情報から決定される。}}$

Comments

(1) $$S(\rho_R) \overset{\text{Parity}}{=} \underset{\text{AdSBH}}{\underset{\shortparallel}{S(\rho_{CFT})}} \overset{\text{HEE}}{=} \underset{\gamma_A}{\mathrm{Min\,Ext}}\left[\frac{A(\gamma)}{4G_N} + S_{bulk}(\Sigma_A)\right]$$





$$= \underset{I}{\mathrm{Min\,Ext}}\left[\frac{A(\gamma I)}{4G_N} + S_{bulk}(I \cup R)\right]$$

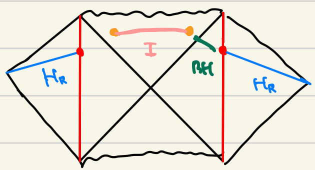
アイランド公式

(2) $S(\rho_{BH})$ の QES が実際に BH の内部にあらわれることを示す必要がある

⇒ 簡単に示すことができる系として $\begin{cases} \text{2次元の JT 動 がある。} \\ \text{Doubly holographic} \end{cases}$

アイランド領域 I について

(1) I が ホーキング放射 H_R と 独立でない。



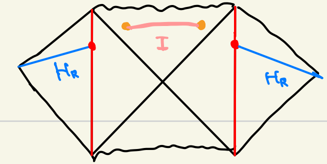
⇒ もし独立だと仮定すると、ファイアーウォール パラドクス

～ ER=EPR 仮説

(2) 具体的に、どのように H_R から I を再構成すれば良いのか？

(ナイーブにやると 因果律がやぶれてしまう)

⇒ $\boxed{\text{研究の最前線：みんなで研究しよう!!}}$



まとめ

- BH内部のアイランド領域は外部のホーキング放射と独立でない、ということがAdS/CFT対応を用いた解析から分かってきた。

- アイランド公式：ホーキング放射のEEはアイランドの効果をとり入れて始めて矛盾無く計算される。

今日話せなかったこと

- 具体的な再構成スキーム（量子誤り訂正との関係）
- アイランド公式の証明とレプリカワームホール.
- de Sitter 空間への応用